# تحليل جريان خارجي با استفاده از تلفيق جريان لايه مرزى و جريان ايده آل

محمدرضا محمدىنائينى (

۱- مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

#### چکیدہ

در مقاله حاضر، روش تقریبی تحلیل جریان لزج و تراکم ناپذیر دو بعدی حول اجسام که دارای کاربردهای صنعتی متعدد می باشد، ارائه می گردد. هر دو جریان لایه مرزی و پتانسیل بطور تکراری حل شده و کمیت های مهم جریان محاسبه می شوند. جریان لایه مرزی آرام و مغشوش به کمک جریان مجازی عمود بر سطح جسم، بعنوان شرایط مرزی حل می شود. جریان حول جسم بوسیله ترکیب جریان های پتانسیل یکنواخت و توزیع چشمه و چاه و گردابه روی سطح جسم و گردابه با قدرت ثابت روی خط جریان جدائی ساخته شده است. جریان چرخشی در ناحیه ویک<sup>۱</sup> نیز ایجاد می شود. باتوسعه برنامه محاسباتی، حل عددی صورت گرفته و قدرت و محل سینگولاریتیهای توزیع شده محاسبه گردیده است. با معلوم بودن طول ویک و ضریب فشار کمینه از داده های تجربی، شکل خطوط جریان و در نتیجه لایه مرزی حول جسم بدست می آیند. همچنین، توزیع فشار و سرعت و منحنی خط جریان لزچ، جریان پتانسیل، ویک، محاسبه شده و با دادههای تجربی مقایسه شده اند. **کلمات کلیدی**: جریان لزچ، جریان پتانسیل، ویک، ضریب فشار، برنامه محاسباتی

# Analysis of External Flow With Combination of Viscous Boundary Layer Flow and Ideal Flow

#### Abstract

In this paper, the analysis of two dimensional viscous incompressible flow around bodies with multiple industrial applications, is presented. Both of boundary layer flow and potential flow have been analysed repeatedly and in this way, the major parameters of flow are calculated. Laminar and turbulent boundary layer flow are solved with the aid of an virtual flow normal to the surface of the body as boundary conditions. The flow around the body has been made by combining the uniform potential flow and distribution of potential source and sink and vortex on the surface of body and constantly powered vortex on the separation streamline. The rotational flow in wake region is also made. With a development of computational program, the numerical method is applied in which, the power and situation of distributed singularities are obtained. Considering wake length and minimum pressure coefficient from empirical data, the shape of streamlines and consequently boundary layer around the body have been obtained. Also, distribution of pressure and velocity and curve of streamline beginning from separation point, have been calculated and compared with empirical values.

Keywords:viscous flow, potential flow, wake, pressure coefficient, computational program

#### ۱– مقدمه

جریان خارجی حول اجسام در موارد متعددی از کاربردهای صنعتی نظیر جریان حول لوله ها و مجراهای تبادل حرارت در مبدلهای حرارتی، پایه پلها، تکیه گاههای دور از ساحل در اقیانوسها، لوله های حاوی نفت در دریاها، دودکشها، برجهای خنک کن، جریان عرضی حول خودرو، بالگرد و هواپیما و ... ظاهر می شود که در آنها، محاسبه نیروهای وارده از طرف سیال بر جسم، از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشد. اصولاً تحلیل این مسئله به دو روش صورت می پذیرد، یکی با حل معادله کامل ناویراستوکس برای جریان که به حل عددی می انجامد و دیگری، روشهای تقریبی که به مدل سازی جریان واقعی سیال می پردازند. در روشهای تقریبی، تحلیل جریان پتانسیل انجام شده و اثر وجود لزجت و چرخیش در آن، به روش های مختلف اعمال مي شود. با حل جريان حول استوانه و استفاده از نگاشت همدیس<sup>۲</sup> می توان جریان حـول هـر جسم دیگری را بدست آورد.

از حلهای ارائه شده برای مدلسازی جریان واقعی با استفاده از جریان پتانسیل معادل، می توان به کارهای ارائه شده در مرجع شماره[۱] و همچنین مرجع شماره [۲] که در آن تنها از دو ورتیسیته استفاده شده و یا کارهای انجام شده در مرجع شماره[۳] که در آن لایه برشی پشت استوانه با ورتیسیته های نقطه ای مدل شده اند ، اشاره کرد . در روش معادل سازی جریان واقعی با جریان پتانسیل، رفتارهای اصلی جریان واقعی مشخص شده و تعدادی متغیر نظیر موقعیت جدائی مقادیردقیق آنها بدست میآیند. بنابراین، در روند تحلیل مساله حدس و تکرار بوجود می آید. می توان معادل سازی یاد شده را به سه گروه اصلی طبقه بندی نمود که عبارتند از:

مدلهای با خط جریان آزاد، مدلهای با سینگولاریتیهای سطحی، مدلهای با خط جریان آزاد و استفاده از سینگولاریتی های سطحی و ویک. در تمام این مدلها، میدان جریان به سه ناحیهٔ لایه مرزی روی جسم، ویک

و جریان آزاد، تقسیم میشود. تفاوت عمده این مدلها در تحلیل ناحیه ویک و مدلسازی آن میباشد. در مدل اول که از نگاشت همدیس استفاده می نماید، روش ساده ای برای تعیین موقعیت خطوط جریان آزاد توسط مرجع شماره [۴] پیشنهاد شده است. در این حالت، از دو چشمه متقارن روی جسم در ناحیه ویک و تصویر آنها در مرکز استفاده شده است. موقعیت و قدرت این چشمه ها با ارضاء شرایط کمکی بدست آمده و اثر ناحیه ویک به روی جریان پتانسیل توسط این چشمهها اعمال میشود.

در این مدل از اثر لایه مرزی و جریان در ناحیه جـدائی صرفنظر گردیده است. مدل دوم حالت خاصی از مدل سوم است. در مدل سوم فرض بر این است که ورتیسیتهٔ ویک در لایه های برشی نازک متمرکز شده اند و ویک چرخشی با یک جفت گردابه که موقعیت آنرا قبلاً نمی دانیم شبیه سازی شده و حباب ویک بسته پدید می آید. جریان داخل این حباب، غیرلزج و چرخشی با ورتیسیته ثابت فرض می شود. بنابر این، در این مدل دو متغیر طول حباب و ضریب فـشار مبنـا بعنوان كميتهاي مبنا مطرح ميشوند. اين مدلها همگي برای جریان دائم مطرح هستند، اما وقتی جریان غیر دائم باشد، گردابهها از پشت جسم بطور غیر منظم جدا می شوند که برای مدلسازی آن در مرجع شماره [۵] روشی ارائه شده است، که در آن نیز کمیتهای آزاد وجود دارند. برای کم کردن تعداد کمیتهای آزاد می توان لایه مرزی را حل نمود و تعداد ورودی های تجربی به مدل را کم کرد.

روش مورد استفاده در این مقاله مبتنی برحل جریان پتانسیل با لحاظ نمودن اثرات لایه مرزی (لزجت) در آن می باشد. در این روش با حدس و تکرار پس از حل لایه مرزی آرام و مغشوش موقعیت جدائی و ضخامت جابجائی لایه مرزی بدست میآید. با استفاده از یک مدل دو مولفهای جریان پتانسیل، توزیع فشار حول استوانه بدست آمده و زاویه جدائی نیز محاسبه میشود.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> - Conformal Mapping

جریان ایده آل و جریان لایه مرزی ارضاء می کنیم. بنابراین، با استفاده از کمیت ضخامت جابجائی لایه مرزی( $\delta^{\bullet}$ )، سرعت مجازی ( $V_{iw}$ ) روی سطح استوانه بدست می آید. اگر این معادله بقاء، در دستگاه خط جریان دو بعدی نوشته شود و انتگرالگیری از آن در امتداد شعاع استوانه از صفر تا ( $\delta^{\bullet}$ ) انجام گیرد، رابطه (۱) برای سرعت مجازی بدست می آید[۷]:

$$V_{iw} = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e u_e \delta^{\bullet}) \tag{1}$$

در این معادله  $ho_e$  و  $u_e$  جرم حجمی و سرعت سیال در این معادله مرزی بوده و  $\delta^{ullet}$  بصورت زیـر تعـریف میشود[۲]:

$$\delta^{\bullet} = \int_{0}^{\delta} (1 - \rho \ u / \rho_e u_e) dn \tag{7}$$

تلفیق جریان لزج و جریان غیرلزج بدین معناست که توزیع سینگولاریتی ها طوری در نظر گرفته شود که جریان مجازی( $V_{iw}$ ) بدست آمده از آنها بخوبی اثر لایه مرزی در جریان پتانسیل را اعمال نماید. همچنین با مساوی قرار دادن اندازه حرکت خطی در امتداد خط جریان (S) برای جریان واقعی لزج و جریان ایده آل معادل و انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان( $\delta$ ) از صفر تا مقدار ضخامت لایه مرزی ( $\delta$ ) به معادله ( $\mathbb{T}$ ) می رسیم.

$$\frac{d\theta}{dn} + \frac{\theta}{u_{iw}} (H + 2 - M_e^2) \frac{du_{iw}}{ds} = \frac{C_f}{2} \qquad (\ref{eq:heather})$$
$$H = \frac{\delta^{\bullet}}{\theta}$$

 $\theta$  معادله  $c_f$  ضریب اصطکاک مجازی،  $\theta$  ضریب اضطکاک مجازی، H ضریب ضخامت اندازه حرکت لایه مرزی مجازی، H ضریب شکل،  $M_e$  عدد ماخ در لبه لایه مرزی،  $u_{iw}$  سرعت مجازی روی جسم در امتداد خط جریان و  $\mathbf{S}$  امتداد خط جریان و  $\mathbf{S}$  امت انداد خط جریان می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند [7]:

# ۲- تلفيق دو جريان

در اعداد رینولدز بالا، لایه مرزی و جریان ایده آل از هم تفکیک شده بوده و بنابراین، می توان جریان خارجی غیرلزج را با جریان لایه مرزی تلفیق نمود. در هر تکرار و پس از حل جریان پتانسیل، از نتایج آن بعنوان شرایط مرزی در معادلات لایه مرزی استفاده شده و توزیع فشار بدست می آید. برای معادل سازی، کل میدان جریان را جریان ایده آل فرض کرده و به منظور اعمال اثر لزجت، قوانین بقاء در شکل انتگرالی، در داخل لایه مرزی و جریان ایده آل معادل یکسان سازی می شوند. با این کار، انحراف خطوط جریان در اثر وجود لزجت به جریان ایده آل تحمیل شده و جریان واقعی مدل میشود. برای انجام این امر، دو روش ضخامت جابجائی و جریان مجازی وجود دارند.[۶]

در روش جریان مجازی، هندسهٔ جسم را تغییر نکرده و تنها شرایط مرزی تغییر می یابد. در مقابل، در روش ضخامت جابجائي، هندسهٔ جسم دائماً در تغيير بوده و ابعاد آن در هر نقطه، به اندازهٔ ضخامت جابجائی لایه مرزی در آن نقطه افزایش می یابد. از توزیع سرعت بدست آمده از مدل اصلاح شدهٔ جریان پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجائی لایهٔ مرزی، برای یافتن حل جديد جريان لزج استفاده مي شود. در واقع، حل توأم و تكراري جریان لزج و جریان پتانسیل، آنقدر ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود. به منظور دست یابی به دقت بالاتر و سرعت بیشتر در حل عددی- با وجود تعداد سلول وگره کمتر - میتوان از ضریب زیر تخفیف<sup>۲</sup>(W) نیز استفاده نمود. در این مقاله از روش جریان مجازی استفاده شده و وجود لایه مرزی در جریان پتانسیل با یک جریان مجازی عمود بر سطح استـوانه ( $V_{iw}$ ) مدل سازی شده است.

جریان پتانسیل معادل حول استوانه با استفاده از توزیع سینگولاریتی های گردابه و چـشمه و چـاه روی سطح اسـتوانه و ترکیـب آن بـا جریـان یکنـواخت ورودی و همچنین ناحیه ویک، ساخته می شـود. یکـسان بـودن دبی جرمی در جریان واقعی و جریان ایده آل معـادل را با اعمـال قانـون بقـاء جـرم بـه شـکل انتگرالـی در دو

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> -Under Relaxation

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_{iw}u_{iw}^2} \tag{(f)}$$

$$\theta = \frac{1}{\rho_{iw} u_{iw}^2} \int_0^{\delta} [\rho u(u_{iw} - u)$$
 (d)

$$+\rho_i u_i (u_i - u_{iw})] dn$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} - \overline{\rho u' v'} \tag{(8)}$$

$$u = \overline{u} + u' \tag{Y}$$

u' و v' سرعتهای نوسانی و u سرعت متوسط در جریان مغشوش می باشد . همچنین با مساوی قرار دادن اندازه حرکت خطی در امتداد عمود بر خط جریان (n) برای جریان واقعی لزج و جریان ایده آل معادل و انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان از صفر تا انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان از صفر تا واقعی و جریان ایده آل معادل روی دیواره بدست می آید:

$$\frac{P_{iw} - P_{w}}{\rho_{iw} u_{iw}^{2}} = k^{\bullet} . (\theta + \delta^{\bullet}) \tag{A}$$

در این معادله  $k^{ullet}$  بیانگر انحناء ضخامت جابجائی بوده و با استفاده از رابطه (۹) بدست میآید:

$$k^{\bullet} = k_w + \frac{d}{ds} \left( \frac{V_{iw}}{u_{iw}} \right) \tag{9}$$

 $\theta + \delta^*$  و یا  $k^{\bullet}$  و یا  $k^{\bullet}$  و یا  $k^{\bullet}$  و یا  $p_{w}$  و یا  $k^{\bullet}$  و یا  $p_{w}$  و یا  $p_{w}$  و یا ناچیزند، می توان با تقریب مناسبی فشار روی دیواره در حالت ایده آل حالت واقعی ( $p_{w}$ ) را با این فشار در حالت ایده آل معادل( $p_{iw}$ ) مساوی در نظر گرفت. در این مقاله در روند حل عددی از روش مستقیم استفاده شده است. در ابتدا  $w_{iw}$  حدس زده شده و با حل جریان پتانسیل, سرعت مماسی جدید روی سطح جسم ( $u_{iw}$ ) بدست می آید. سپس با استفاده از آن و حل لایه مرزی و ویک، سرعت در لبه لایه مرزی( $u_{e}$ ) محاسبه شده و یا د

تا  $u_{iw}$  بدست آمده از حل جریان پتانسیل معادل، همگرا شود.

الف- ورتیسیته درلایه برشی و لایه مرزی به ترتیب روی خط جریان آزاد خارج شده از نقطه جدائی و منحنی بدنه متمرکز شده اند. ب- نقاط سکون دقیقاً در پائین دست نقاط جدائی روی بدنه قرار دارند.

می توان با استفاده از توزیع چشمه و چاه روی جسم، اثر لایه مرزی قبل از نقط ه جدائی را طوری در نظر گرفت که سرعت عمودی روی سطح، بصورت:

$$V(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{2u_e \delta^{\bullet}}{D}\right) \tag{(1.1)}$$

بوجــود آيــد. در ايــن معادلــه D بعــد جــسم میباشد. V( heta) بعد از نقطه جدائی ناچیز در نظر گرفته میشود. با توجه به فرضیات فوق، یک مسا له نیـومن ً بوجـود ميآيد كه حل آن، توسط توزيـع سـينگولاريتي بدست خواهد آمد. بدین منظور، با توزیع چـشمه با قـدرت ( $m(\theta)$  و توزيـع گردابـه بـا قـدرت  $m(\theta)$  روى دایرہ و گردابۂ با قدرت ثابت  $\gamma_w$  روی لایہ برشے و ترکیب آنها با جریان یکنواخت با سرعت بدون بعد واحد  $V_0 = 1$ ، جريان حول استوانه بدست مي آيد. توزيع چشمه، با ارضاء  $V_r = V(\theta)$  توزيع چشمه، با ارضاء در آن  $V(\theta)$  از معادله (۱۰) بدست آمده است، حاصل می شود. توزیع گردابه نیز طوری تعیین می شود که سرعت عمودی روی دایره صفر شده و در نقطه جـدائي ورتيـسيته بقـاء داشـته باشـد يعنيي که در آن sو w مبين بالا دست و  $\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$ یائین دست نقطه جدائی در قسمت بیرونی استوانه و اندیس d مبین یائین دست نفط و جدائی در قسمت

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>-Neumann

ـ نشریه مہنــدسـی دریــا

داخلی استوانه میباشند. علاوه بر این باید سرعت مماسی در  $heta_d$  ناشی از توزیع گردابه، برابر و عکس سرعت مماسی ناشی از توزیع چشمه باشد. زیرا در داخل استوانه، بدلیل عدم وجود نقطه منفرد سرعت سیال صفر خواهد بود. شکل زیر نمایش کلی لایه مرزی، لایه برشی و حباب ویک را ارائه می دهد.



شماره ۱ - نمایش نواحی جریان حول استوانه

در ایت روش، عصدد رینولدز، ضریب فسشار کمینه ( $C_{pm}$ ) و زاویه جدائی ( $\phi_s$ ) بعنوان کمیت های ورودی در نظر گرفته می شوند. سپس، توزیع فشار روی سطح دایره از مدل جریان غیر چرخشی پتانسیل محاسبه می گردد. برای این منظور، توزیع گردابه، توزیع چشمه و چاه و گردابه ثابت روی خط جریان توزیع پیماند. آنگاه با توزیع چشمه و چاه و گردابه ثابت روی خط جریان یا توزیع چشمه و جاه و گردابه ثابت روی خط جریان استفاده از آنها، سرعت القائی در هر نقطه، سرعت روی لایه مرزی روی استوانه برای جریان آرام و مغشوش [۷] پتانسیل روی جدائی و می آید. مجدداً از حل جریان وری چان می توزیع فشار بدست می آیند. سپس روی و پس مرزی و می استوانه برای جریان آرام و مغشوش ای پتانسیل پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجائی در لایه مرزی و مرزی و مرزی و مخامت جابجائی در لایه مرزی و مرزی و مرزی و می آویه جمانی جدید بدست می آید. مجدداً از حل جریان پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجائی لایه مرزی، ورند توزی پتانسیل با استفاده از می شود. ای پتانسیل با استفاده از می می آید. مجدداً از حل جریان پتانسیل با استفاده از می می آورسیدن ضریب فسار کمینه مرژی و می از می شود. ای پتانسیل با استفاده از می شود. از می شود. ای پتانسیل با استفاده از می می آورسید می آور می شود. ای پتانسیل با استفاده از می می می آورسیدن به همگرائی تکرار می شود. ای می همگرائی عبار می سود. ای پتانسیا

محاسبه شده به مقدار تجربی مطابق با عدد رینولدز. منحنی خط جریان آزاد جدا شده از نقط ه جدائی، بصورت منحنی درجه دوم  $(\theta) = r = c$  در نظر گرفته میشود. این خط باید در نقطه جدائی مماس بر دایره بوده و در فاصله محدودی از استوانه – بدلیل ثابت بودن قدرت گردابه توزیع شده روی آن– تمام شود. به بیان دیگر، قدرت ورتیسیته دور از استوانه باید به سمت صفر میل نماید. بدین ترتیب، کمیت طول ویک ( $W_L$ ) وارد

مساله می شود. بنابراین مدل حاضر شامــل دو کمیـت زاویـه جدائـی (  $heta_{
m s}$ ) و طـول ویک (  $W_L$ ) است. معادله پیشنهادی برای خط جریان جدا شـده از نقطـه جدائی عبارتست از [8]:

$$r = (W_L - 1)(\theta - \theta_S)^2 / \theta_S^2 + 1 \tag{11}$$

شبکلهای پی در پی این خط جریان در تکرارهای مختلف، از انتگرالگیری روی معادله  $\psi = cte$  م منتعب از نقطه جدائی با شرایط اولیه  $\theta = \theta_{s}$  در r = 1 بدست می آید و خطوط جریان جدید تا  $r = W_{L}$  محاسبه می شوند. حدس اولیه برای  $W_{L}$  بین 1.5D تا 3D، منجر به همگرائی سریعتر می شود. تغییر در کل هد فشاری

بدون بعد ( H ) در عرض لایه برشی، عبارتست از :

$$\Delta H = U_i^2 - U_0^2 = C_{P_0} - C_{P_i} \tag{11}$$

$$C_{P_h} = 1 - U^2 + \Delta H \tag{17}$$

i و o بیانگر نواحی داخلی و خارجی لایه برشی بوده و U سرعت مماسی حول استوانه است که با سرعت جریان یکنواخت  $V_0$ ، بدون بعد شده است و از حل جریان پتانسیل بدست میآید.  $C_{P_b}$  نیز ضریب فشار بدون بعد، بعد از نقطه جدائی میباشد. با توجه به آنکه  $U_i = U_0 - U_i$  از معادله (۱۲) نتیجه می شود:

$$\Delta H = 4\pi \gamma_S (\pi \gamma_S - U_0) \tag{14}$$

$$\operatorname{Re}_{\theta} > 1.174(1 + \frac{22400}{\operatorname{Re}_{x}})\operatorname{Re}_{x}^{0.46}$$
 (10)

برای شرایط اولیه لایه مرزی مغشوش ضخامت اندازه حرکت در نقطـه گـذار از آرام بـه مغـشوش در ناحیـه آرام برابـر ضـخامت انـدازه حرکـت در شـروع ناحیـه

<sup>5</sup>-Michel

$$V_{tp} = \frac{q}{2\pi r_{tp}} \tag{(7.)}$$

در محاسبات  $\frac{q}{2\pi} = 1$  و به عبارت دیگر، چـشمه با قدرت واحد (m = 1) فرض شده است. بر این اساس:

$$V_{tp} = \frac{1}{r_{tp}} \tag{(1)}$$

$$V_r = V_{tp} \cos\beta = G(p, t) \tag{(11)}$$



p شکل ۳- سرعت در نقطه t ناشی از چشمه در

سرعت القاء شده در نقط هt در اثر گردابه با قدرت واحد در نقطه p در جهت heta عبارتست از :

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} Ln \ r \tag{(YT)}$$

$$V_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \Longrightarrow V_{tp} = \frac{-\Gamma}{2\pi r} \tag{(14)}$$

در محاسبات 
$$\gamma=rac{-\Gamma}{2\pi}$$
 و  $\gamma=\gamma$  بوده و در نتیجه:

$$V_{tp} = \frac{1}{r_{tp}} \tag{7}$$

مغشوش فرض شده و از افت اندازه حرکت در این  
فاصله صرفنظر می شود.  
همچنیین فاکتور شکل 
$$H$$
 در ابتدای لایه مرزی  
مغشوش بین ۱/۳ تا ۱/۴ در نظر گرفته می شود.  
در لایه مرزی آرام طبق روش توایت<sup>2</sup> در نقطه جدائی  
در لایه مرزی آرام طبق روش توایت<sup>2</sup> در نقطه جدائی  
هد<sup>۷</sup> ،  $A_{sep} = -0.09$  و در لایه مرزی مغشوش طبق روش  
هد<sup>۷</sup> ،  $H = 2.4$  می باشد. بنابراین برای لایه مرزی  
آرام و مغشوش، به ترتیب روابط (۱۶) و (۱۷) بدست  
می آیند[۷]:

$$\theta^2 = \frac{0.45\mu}{\rho U_e^6} \int_0^x U_e^5 dx \tag{19}$$

$$\frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} (U_e \theta H_1) = 0.0306 (H_1 - 3) - 0.6169$$
 (1Y)

که در این روابط برای 
$$H \le 1.6$$
 بدست میآید: $H_1 = 3.3 + 0.8234 (H - 1.1)^{-1.287}$  (۱۸)

و برای 
$$1.6 < H$$
 بدست میآید:

$$H_1 = 3.3 + 1.5501(H - 0.6778)^{-3.064} \quad (19)$$



<sup>6</sup> - Thwaite

<sup>7</sup> - Head

$$\gamma(\theta_{t}) = \frac{\gamma_{W}Q(\theta_{t}) - \sin\theta_{t}}{\pi}$$
(٣١)

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{t}) = \int_{p_{0}}^{p_{1}} [G(\mathbf{p}, t) - G'(\mathbf{p}', t)] ds_{\mathbf{p}} \qquad (\texttt{TT})$$

با توجه به اینکه نقاط سکون، دقیقاً بعد از نقاط جدائی می باشند، لـذا در نقط ه جدائـی ( $\theta_d$ ) بایـد سرعـت مماسی ناشی از گردابه هـا بـا سـرعت ممـاس ناشـی از چـشمههـا برابـر و عکـس هـم بـوده و بـه عبـارت دیگر  $D_s = -2\pi\gamma_d$  دیگر  $D_s = -2\pi\gamma_d$  نتیجـه ورتیسیته در نقطه جدائی ( $\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$ ) نتیجـه میشود :

$$\gamma_{W} = \frac{2\sin\theta_{s} - u_{s}}{2(Q_{s} - \pi)} \frac{Q_{s}}{\pi} + \frac{U_{s}}{2\pi}$$
(TT)

(۳۴)  
$$U_e(\theta) = -\sin\theta + u(\theta) + \pi\gamma(\theta) + \gamma_w Q(\theta)$$
  
با قرار دادن قدرت گردابه ها بدست میآید:

$$U_{\rho}(\theta) = -2\sin\theta + u(\theta) \tag{7a}$$

$$+\frac{(u_{s}-2\sin\theta_{a})}{(\pi-Q_{a})}Q(\theta)$$

در این معادله اندیس a مربوط به نقطه جدائی است و جمله اول در اثر جریان یکنواخت ، جمله دوم ناشی از جابجائی لایه مرزی و جمله سوم در اثر ترکیب اثرات لایه مرزی و ویک می باشند. پس از نوشتن معادله برنولی و اعمال شرط عدم لغزش روی سطح استوانه و بدون بعد کردن سرعتها با استفاده از  $_{\infty}U_{i}$ ، ضریب فشار بدست میآید:

$$C_P(\theta) = 1 - U_e^2(\theta)$$
 (39)

$$V_{\theta} = V_{tp} \cos \beta = G(p, t) \tag{(79)}$$

اگر  $V(\theta_t)$  را سرعت مجازی برای به حساب آوردن لایه مرزی درجریان پتانسیل در نظر بگیریم، آنگاه سرعت عمودی ناشی از تمام چشمه های موجود روی دایره در نقطه t باید در شرط مرزی

$$r = 1$$
  $V_r = V(\theta_t)$ 

صدق كند بنابراين:

(TV)

$$\pi m(\theta_t) + \int_0^{2\pi} m(\theta_q) G(q,t) d\theta_q = V(\theta_t)$$

چـون نقـاط q و t هـر دو روی دایـره مـیباشـند ۲/۵ و بدلیل تقارن در توزیع چشمه، قدرت توزیع چشمه با استفاده از رابطه (۲۸) بدست میآید:

$$m(\theta_t) = \frac{V(\theta_t) - \overline{V}/2}{\pi}$$
 (1A)

$$\overline{V} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V(\theta) \mathrm{d}\theta \tag{19}$$

سرعت مماسی ناشی از جریان یکنواخت و گردابه های توزیع شده روی دایره و روی خط جریان آزاد ، در نقطه t (نقطـــه ای روی دایـــره ) بایـــد در شـــرط مرزی  $0 = (\theta) V$  روی سطح استوانه و درون آن صدق کند. زیرا داخل دایره نقطـه منفـردی وجـود نداشـته و بنابراین نباید جریانی داخل دایره وجـود داشـته باشـد. بدین ترتیب:

$$\pi \gamma(t) - \sin \theta_{t} + \int_{p_{0}}^{p_{1}} \gamma(p) [G(p, t) \qquad (\tau \cdot)$$
$$- G'(p', t)] ds_{p} = 0$$

با توجه به این رابطه، با ثابت بودن قدرت گردابه از  $p_0$  تا  $p_1$  برابر  $\gamma_w$ ، توزیع قدرت گردابه روی استوانه بدست میآید:

سال چهارم/ شماره ۷/ بهار ۱۳۸۷

کمیت طول ویک حدود 2.3D در نظر گرفته می شود. برای بدست آوردن معادله خط جریان جدا شده از نقطه جدائی، باید شرط عدم تغییر تابع جریان در طول خط جریان را اعمال نمائیم:

$$d\psi_{sep} = -u_{\theta}dr + ru_r d\theta = 0 \qquad (\texttt{TY})$$

معادلـه (۱۱) بعنـوان حـدس اول بـرای منحنـی خـط جریان آزاد جدا شده از نقطه جدائی در نظر گرفته شده و در تکرارهای بعدی معادله ایـن خـط جریـان بدسـت میآید:

$$r_{i+1} = r_i \exp[(\overline{u_r}/u_\theta)(\theta_{i+1} - \theta_i)] \quad (\text{TA})$$

 $\overline{ heta}_r$ متوسط مقادیر بین دو گره مجاور بوده و  $\overline{u_r/u_ heta}$  از  $\overline{ heta}_r$  با تقسیمات مساوی تغییر می کند.

$$a^{k+1} = a^k + w(a^{k+1} - a^k)$$
 (rg)

### ۶- نتايج

مدلسازی عددی جریان با توجه به عدد رینولـدز (جریان آرام و مغشوش) و ضریب فشار کمینه تجربی به عنوان مقادیر ورودی، انجام گرفته و طول ویک، زاویـه جدائی و ضریب فشار حول استوانه بدست آمده است. منحنی توزیع فشار بدون بعد (ضریب فـشار  $C_p$ ) روی سطح استوانه بـر حـسب زاویـه از نقطـه سـکون، در

شکلهای (۴) و (۵) و(۶) نمایش داده شده است. با توجه به این شکلها می توان نتایج را با مقادیر تجربی مقایسه نمود. نتایج با داده های تجربی تطابق مناسبی را نشان میدهند.

در شکل (۴) توزیع فشار بدون بعد در جریان آرام برای عدد رینولدز ۲۴۴۰۰۰ رسم گردیده است.



شکل ۴- توزیع فشار بی بعد برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰

با افزایش عدد رینولدز، در حدود رینولدز ۴۲۰۰۰۰ میدان جریان از حالت آرام به مغشوش تبدیل می شود[۷].

برای جریان مغشوش که لایه مرزی از دو قسمت آرام و مغشوش تشکیل شده است، بعنوان نمونه شکلهای (۵) و (۶) برای اعداد رینولدز ۴۴۰۰۰۰ و ۴۲۸۰۰۰۰ رسم گردیده است.



شکل ۵- توزیع فشار بی بعد برای رینولدز ۴۴۰۰۰۰

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> - Under Relaxation



شکل  $\mathcal{F}_p$  - $\mathcal{F}$  بدون جریان مجازی

بعنوان نمونه منحنی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی بصورت حدس اولیه و نهائی در شکل (۷) برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰ ( جریان آرام ) در زاویه جدائی ۸۸ درجه رسم گردیده است.



شکل ۷- خط جریان جدائی برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰

در جدول (۱) نتایج محاسبات بصورت ضریب فشار کمینه ( $Cp_m$ ) و همچنین مقدار تجربی آن، مقدار درصد خطا در محاسبه ضریب فشار کمینه، کمیت طول ویک ( $W_L$ )، زاویه جدائی جریان ( $\theta_{sep}$ )، قدرت گردابه ثابت روی خط جریان جداشده از نقطه جدائی گردابه ثابت روی خط جریان جداشده از نقطه جدائی رینولدز مختلف در حالت آرام و مغشوش، ارائه گردیده است.

## ۷- نتیجه گیری

طبق شکلهای (۴) و (۵) و (۶)، ضریب فشار بدون بعد در نقطه سکون در تمام رینولدزها واحد میباشـد و بـا حرکـت روی سـطح اسـتوانه، رونـد کاهـشی را تـا مقدارکمینه خود نشان میدهد که بدلیل رشد ضخامت

لایه مرزی و متاثر شدن میدان جریان از وجود استوانه میباشد. سپس تا نقطه جدائی افزایش یافته و پس از نقطه جدائی در مقدار ثابتی کوچکتر از یک باقی میماند. نتایج بدست آمده بر اساس این شکلها، انطباق خوبی با دادههای تجربی را نشان میدهند اما در نزدیک نقطه جدائی اختلافی حدود ۵ درصد را نشان می دهد. علت این اختلافی حدود ۵ درصد را نشان می دهد. علت این اختلاف در نزدیک نقطه جدائی، خطائی است که در روشهای تقریبی حل لایه مرزی (روش های توایت<sup>6</sup> و هد<sup>۱۰</sup>) در محاسبه ضخامت لایه مرزی وجود دارد.

شکل (۴) برای جریان آرام انطباق بسیار خوبی بین دادههای تجربی و نتایج حل عددی را نشان میدهد. در این رینولدز زاویه جدائی ۷۸ درجه میباشد. با افزایش عدد رینولدز و تبدیل میدان جریان از حالت آرام به مغشوش (شکلهای (۵) و(۶))، زاویه جدائی به تدریج افزایش یافته و از حدود ۷۸ درجه به ۱۰۵ درجه رسیده و طول ویک نیز افـزایش را نـشان مـی دهـد. ایـن امـر بدليل اندازه حركت خطى بيشتر جريان مغشوش نسبت به جریان آرام می باشد. به عبارت دیگر با افزایش رینولدز، طول ویک وسعت بیشتری پیداکرده و وجود استوانه در طول بیشتری از میدان جریان ایجاد اغتشاش می کند. در این حالت با وجود افزایش زاویه جدائی، فاصله بین دو نقطه جدائی بالا وپائین کمتر شده و ناحیه ویک محدوده کمتری را اشغال می کند. بنابر این اختلاف فشار بین جلو و پشت استوانه که ناشی از محدوده وسیع ناحیه ویک در حالت آرام بود و باعث نیروی درگ<sup>۱۱</sup> فشاری قابل ملاحظه ای می شد. در حالت مغشوش کم شده و نیروی درگ وارد بر استوانه به شدت کاهش می یابد. علت این امر، اندازه حرکت خطی زیاد جریان مغشوش است که باعث می شود خطوط جریان شکل منطبق بر بدنه<sup>۱۲</sup> خـود را حفظ نمایند و فشار معکوس روی استوانه کاهش یابد. به همین دلیل بازیابی فشار در پشت استوانه در جریان مغشوش بیشتر از جریان آرام بوده و مقدار ضریب فسار

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>-Thwaite

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> -Head

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>-Drag force

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>-Streamlining

طبق شکل (۷)، مشاهده می شود که در جریان آرام برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰، موقعیت خط جریان از مقدار حدس اولیه ۱۲۵ درجه به مقدار ۸۸ درجه پس از همگرائی روش حل عددی رسیده است. حدس اولیه از زاویه ۱۲۵ درجه شروع شده و پس از همگرائی زاویه جدائی در ۸۸ درجه نیز رسم شده و سپس به منحنی نهائی رسیده است.

جدول (۱) نشان می دهد که روند تغییرات  $\gamma_{w} e_{s} \gamma_{e}$  با افزایش رینولدز از نظر قدر مطلق کاه شی است. همچنین ملاحظه می شود که  $Cp_{m}$  با افزایش رینولدز، کاهش یافته و با رسیدن جریان به حالت مغشوش آهنگ کاهش سریعتری را به خود می گیرد. درصد خطا در محاسبه  $Cp_{m}$  نیز در جریان مغشوش مغشوش شدن جریان اثر چشمگیری روی افزایش کند مغشوش شدن جریان اثر چشمگیری روی افزایش کند طول ویک  $W_{L}$  ندارد. زاویه جدائی نیز به شدت تابع نوع جریان بود و تغییرات می روند.

مبنا (  $Cp_b$  ) در جریان مغشوش بزرگتر از جریان آرام است.

شکل (۵) در جریان لایـه مـرزی مغـشوش بـا رینولـدز ۴۴۰۰۰۰، یکبار با در نظر گرفتن اثر ضخامت جابجـائی لایه مرزی در روند حـل عـددی و بـار دیگـر بـدون آن ضریب فشار را نمایش میدهد. از ایـن شـکل ملاحظـه می شود که مدل سـازی جریـان، بـدون در نظرگـرفتن ضخامت جابجائی لایه مرزی در اعداد رینولدز متوسـط، خطای قابـل ملاحظـه ای را در بـر دارد. زاویـه جـدائی جریان نیز از حدود ۸۰ درجه برای جریان آرام به حـدود ۱۰۵ درجه برای جریان مغشوش رسیده است.

نتایج بدست آمده از توزیع فشار در شکل (۶) نشان می دهد که برای رینولدز ۴۲۸۰۰۰۰ اگر از اثر ضخامت جابجائی لایه مرزی صرفنظر کنیم خطای بسیار اندکی بوجود آمده و با دقت مناسبی می توان از جریان مجازی در رینولدزهای بالا صرفنظر نمود. همچنین در تمام منحنی ها، ضریب فشار پس از نقطه جدائی اممام منحنی ها، ضریب فشار پس از نقطه جدائی ناحیه ویک حالت تصادفی داشته و احتمال وجود سیال و ایجاد فشار آن روی سطح استوانه در همه جا یکسان است.

Re	C <sub>pm</sub> (exp)	C <sub>pm</sub>	Deviation (/.)	$W_L$	$\theta_{sep}$	$\gamma_{ m w}$	$\gamma_{ m s}$
1 • 1 • • •	-1/82	-1/3197	•/• ٣٣	۴	٨٠	-•/7149	-•/71988
7.7	- <b>\ / • A</b>	-1/•74	۰/۵۵	4,7	٧۶	-•/Y   Y	۰/۲۱۱۳۵
744	- ) / ) A	$-1/1V\Delta$	•/47	4,4	۷۸	-•/٢•۶٩	-•/Y•X۶٩
878	-1/24	-1/71	۲/۲۴	۴,۸	٨۴	-•/٢••٣۵	-•/٢ <b>••</b> ۴
478	-1/٩	$-1/\lambda\Delta$	۲/۶۳	4,9	۱۰۵	-•/ <b>\</b> \\\&	-•/ <b>\</b> YYA
44	-1/97	$-1/\lambda\lambda$	۲/۰۸	4,97	1.8	-•/17829	-•/1VV۵
427	-١/٩۵	–١/٩	۲/۶۵	۵,۶	١٠٩	-•/ <b>\%</b> ۵۹۷	-•/18242

جدول ا- نتایج عددی

4-Parkinson and Jandali, A Wake Source model for bluff body Potential flow, J.Fluid Mech, Vol 40, PP 577 – 594, 2002.

5-F.D.Deffenbaugh, Time Development of Flow about an Impulsively Started Cylinder, AIAA.J, Vol. 14, no. 7, PP 908 – 913.

6-Celik and pated and Landweber, Calculation Mean Flow Past circular Cylinders by Viscous Inviscid Interaction, J. Fluids Engineering, Vol.107, PP 218 – 223, 2004.

7-White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 1995.

۸- مراجع

1-R.B. Payne, Calculation of unsteady Viscous flow Past a citrcular Cylinder, J.Fluid. Mechanics, Vol. 4, 1957.

2-A.E.Bryson, Symmetric Vortex Seperation on Circular Cylinders, J. Applied Mechanics, PP 643-646, 1959.

3-Sarpkaya, Inviscid Model of two -Dimentional Vortex Shedding by a Circular Cylinder, AIAA.J, Vol. 17, No. 11, PP 1193 - 1200.