

استفاده از روش جداسازی متغیرها برای مطالعه موج شکن شناور

اسماعیل مسعودی^۱، حمید زراعتگر^{۲*}^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر؛ esmaelmasoodi@aut.ac.ir^۲ استادیار، دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر؛ hamidz@aut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۲/۳۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۰۶

کلمات کلیدی:

موج شکن شناور

جداسازی متغیرها

مطالعه پارامتری

در این مقاله به مطالعه و بررسی روش جداسازی متغیرها و اعمال این روش در حل مساله موج شکن شناور دوبعدی در دامنه نامحدود و عمق آب محدود تحت اثر موج خطی پرداخته شده است. روش جداسازی متغیرها به عنوان روشی تحلیلی و کارا در بررسی مسائل دو بعدی مرتبط با جسم شناور مورد استفاده قرار میگیرد. در این روش با استفاده از تقسیم دامنه مساله به زیر دامنه های جداگانه و سپس تخمین پتانسیل سرعت در هر زیر دامنه به وسیله سری های متعامد، و در ادامه برقراری شروط مرزی بین زیردامنه ها، پتانسیل کل مساله و در نتیجه آن ضرائب جرم اضافه، میرایی، و نیروهای وارد بر جسم شناور بدست می آیند. در این مطالعه روش جداسازی متغیرها در مورد مقطعی مستطیلی مورد استفاده قرار داده شده و ضرائب میرایی و جرم اضافه و همچنین نیروهای وارد بر جسم شناور در سه درجه آزادی سویی، هیو و رول بدست می آیند. در ادامه ضرائب بازتاب و گذردهی و در نتیجه آن نیروی دریافت وارد بر جسم شناور بدست آمده و تاثیر پارامتر لاغری در نیروی دریافت ایجاد شده روی موج شکن محاسبه می شود نتایج نشان می دهند متغیر تاثیرگذار در ضرائب بازتاب و گذردهی موج شکن شناور، نسبت عرض موج شکن به آبخور آن بوده که با افزایش این متغیر ضریب گذردهی کاهش و ضریب بازتاب افزایش می یابند و لذا عملکرد موج شکن بهبود می یابد. هم چنین نتایج نشان می دهند متغیر نسبت عمق آب به آبخور موج شکن تاثیر زیادی در عملکرد موج شکن شناور ندارد.

Application of Method of Separation of Variables for Analyzing Floating Breakwater

Esmaeel Masoudi¹, Hamid Zeraatgar²¹ MS.C Student, Amirkabir University of Technology; Esmaelmasoodi@aut.ac.ir² Assistant professor, Amirkabir University of Technology; Hamidz@aut.ac.ir

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 21 May 2015

Accepted: 26 Jan. 2016

Keywords:

Separation of variables

Floating breakwater

Parametric study

ABSTRACT

In this article, a rectangular cross section breakwater in water of finite depth and infinite domain is studied using the separation of the variables method in regular, sinusoidal waves. Determining the radiation potentials in three degrees of freedom e.g. sway, heave and roll, added mass and damping coefficients of sway, heave and roll motions is obtained. Diffraction problem is solved according to linear wave theory and resulting forces on structure for three degrees of freedom is obtained. As far as validation of this study is concerned, results are compared with other researches. Having the diffraction potentials in each region, the transmission and reflection coefficients and drift force are obtained. Furthermore, a parametric study on the effects of water depths, floating breakwater sizes as well as wave number on transmission and reflection coefficients carried out. Some new achievement is concluded by this study. The results show that mean drift force on the breakwater increases as the ratio of width to height of the breakwater, increases in different water depths. Also, increasing the depth of water results in increasing of mean drift force, similarly. However, the effect of the width of the breakwater is more pronounced than the effect of the depth of water.

۱ - مقدمه

گسترش مناطق ساحلی در نقاط مختلف زمین نیاز ایجاد سپری در برابر آب و خصوصاً موج را ایجاد کرده است و موج شکن ها در ابعاد و اندازه های گوناگون، به عنوان پاسخی به این نیاز به طور گسترده در مناطقی که در معرض امواج قرار دارند استفاده شده اند. هدف نصب یک موج شکن در درجه اول کاهش ارتفاع موج است به طوری که مناطق حفاظتی پشت موج شکن، برای کاربری خاص مورد نظر قابل استفاده باشند. معمولاً دو عامل در انتخاب موج شکن برای یک منطقه تاثیر گذارند: عامل اول میزان سرمایه و عامل دوم میزان کاهش ارتفاع موجی است که از نصب موج شکن بدست می آید. امروزه افزایش استفاده از قایق های تفریحی و شناورهای اختصاصی نیاز به ایجاد مناطق حفاظت شده در برابر موج را افزایش داده است، چرا که به علت تعداد زیاد این گونه شناورها مکان های امن لازم برای قرار گیری آنها به اندازه ی کافی وجود نداشته و بنابراین مالکان این شناورها مجبور خواهند بود مناطق دیگر که در معرض موج هستند را انتخاب کنند و این امر ضرورت ایجاد منطقه محافظت شده در برابر موج را ایجاد خواهد کرد. به علت هزینه بالا و همچنین عواقب زیست محیطی نصب موج شکن های ثابت، موج شکن های شناور امروزه مورد توجه محققان مختلف قرار گرفته اند.

به طور کل روش های بررسی رفتار موج شکن شناور به سه دسته مطالعات عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی تقسیم می شوند. در مطالعه عددی معمولاً از روش های المان محدود و المان مرزی استفاده می شود. از جمله کارهای انجام شده در این زمینه می توان به استفاده از روش المان محدود و نامحدود توسط لی و همکاران (۱۹۹۱)، استفاده از روش المان مرزی برای جسم شناور توسط یاماتو (۱۹۸۰) و همچنین استفاده از روش المان محدود برای مطالعه موج شکن با مقطع استوانه ای توسط طباطبایی و همکاران [۸] اشاره کرد. به علت محدودیت های هر کدام از دو روش بالا، محققان در سال های اخیر به رویکرد استفاده همزمان از این دو روش برای تحلیل عددی مساله موج شکن پرداخته اند. از جمله این مطالعه ها می توان به استفاده همزمان از دو روش المان مرزی و المان محدود برای مساله جسم شناور توسط وو [۳] اشاره کرد. از جمله کارهای انجام شده در زمینه روش های آزمایشگاهی نیز می توان به سانسیراج و همکاران [۴] اشاره کرد که در آن نویسنده به بررسی پاسخ حرکت موج شکن شناور پانتونی مهار شده پرداخته است.

روش های تحلیلی مورد استفاده برای بررسی مساله جسم شناور در آب، با کارهای گرت (۱۹۷۱) در مورد بررسی مساله برخورد موج به اسکله شناور در آب آغاز شد. در ادامه محققان دیگری همچون هلم (۱۹۸۲)، وو و تیلور (۱۹۹۰)، برگرن و جانسون (۱۹۹۲)، لی (۱۹۹۵)، هسو و وو (۱۹۹۷) و ژنگ و همکاران [۱ و ۶] به بررسی مسئله جسم شناور در آب و یا مسائل مشابه با رویکرد استفاده از روش های تحلیلی

پرداختند. در روش تحلیلی ابتدا دامنه مساله به زیر دامنه های مشخص تقسیم می شود و در ادامه تابع پتانسیل سرعت در هر زیر دامنه توسط سری های متعامد بیان می شود. با ارضای شرایط مرزی عمومی (شرط سطح آزاد، شرط بدنه موج شکن، شرط کف) سری های متعامد با یکسری ضرائب مشخص می شوند. در نهایت با ارضای شرایط مرزی بین زیر دامنه ها، مقادیر ضرائب نیز تعیین می شوند که در نتیجه آن پتانسیل سرعت در هر زیردامنه مشخص می شود. با در اختیار داشتن تابع پتانسیل سرعت، مشخصات سطح آزاد و موج در دو طرف موج شکن و در نتیجه آن ضرائب بازتاب و گذردهی بدست می آیند.

در مطالعه حاضر موج شکن با مقطع مستطیلی شناور در آب با استفاده از روش جداسازی متغیرها مورد بررسی قرار می گیرد. پس از دستیابی به پتانسیل های تشعشع در سه مود حرکتی سوی، هیو و رول، ضرائب جرم اضافه و میرایی برای این سه حرکت بدست آورده می شود. هم چنین به منظور اعتبار سنجی خروجی ها از داده های ژنگ و همکاران [۱] استفاده می شود. ضمناً معادلات مورد استفاده مشابه مرجع [۱] در نظر گرفته شده اند. پس از تکرار فرآیند حلی که سابقاً توسط مرجع [۱] انجام شده است و در پی آن اعتبار سنجی داده ها، قادر خواهیم بود نتایج جالب توجه تری را نیز بدست آوریم. در واقع هدف اصلی این مقاله انجام مطالعه پارامتری بر روی متغیرهای تاثیر گذار بر طراحی موج شکن شناور می باشد. با دستیابی به پتانسیل تفرق در زیردامنه ها قادر خواهیم بود نیرو های وارد بر جسم را بدست آوریم و در پی آن ضرائب گذردهی و بازتاب استخراج می شوند. همچنین با توجه به رابطه ضریب بازتاب و نیروی دریافت، نیروی دریافت وارد بر موج شکن را بدست آورده و در پایان نیز پارامترهای تاثیرگذار در نتایج مورد مطالعه پارامتری قرار می گیرند. لازم به ذکر است ضرایب جرم اضافه و میرایی بر اساس حل مساله تشعشع و نیروی موج و ضرایب بازتاب و گذردهی با توجه به عدم در نظر گرفتن مهار، بر اساس حل مساله تفرق و با فرض ثابت بودن جسم بدست آمده اند. با این وجود امکان محاسبه ضرایب بازتاب و گذردهی با فرض متحرک بودن جسم و حضور مهار نیز وجود دارد که نمونه آن توسط ابوالعظم و همکاران [۷] و با روشی متفاوت از این مقاله نیز انجام شده است.

۲ - مدل ریاضی و حل تحلیلی مساله موج شکن شناور دو بعدی با مقطع مستطیلی

۲-۱- فرمولاسیون کلی مساله مقدار مرزی

برای تحلیل موج شکن شناور سیال را ایده آل فرض می کنیم. در صورتی که طول موج شکن به طول موج $(\frac{L}{\lambda})$ عدد بزرگی باشد آنگاه این فرض منطقی است. از طرفی از لزجت سیال نیز صرف نظر میکنیم. با این فرض می توان سرعت سیال را به صورت یک تابع اسکالر به صورت زیر بیان کرد:

۱- مساله تفرق

مساله خطی تفرق موج بوسیله پتانسیل نوسانی φ_D به صورت زیر بیان می شود [۴]:

$$\varphi_D(x, z, t) = \varphi_i(x, z, t) + \varphi_s(x, z, t) \quad (7)$$

$$= \text{Re}\{\{\varphi_i(x, z) + \varphi_s(x, z)\}e^{-i\omega t}\}$$

مساله مقدار مرزی بالا را می توان دارای شرایط مرزی زیر دانست:

$$\nabla^2 \varphi_s = \nabla^2 \varphi_i = 0 \rightarrow \nabla^2 \varphi_D = 0 \quad (8) \quad \text{در کل دامنه}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_s = 0 \quad (9) \quad \text{در } (z=0)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0 \quad (10) \quad \text{در } (z=-d)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \quad (11) \quad \text{روی بدنه موج شکن}$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \mp ik\varphi_s = 0 \quad (12) \quad \text{در دوردست}$$

در معادله (۱۱) n بردار نرمال سطح (به سمت خارج از بدنه) می باشد. همچنین منظور از "دوردست" در معادله (۱۲)، مرزی به فاصله معین $x = x_R$ از مرکز سطح موج شکن در راستای محور x می باشد. اندازه ای این فاصله بر حسب ابعاد جسم تعیین می شود.

۲- مساله تشعشع

مساله تشعشع می تواند توسط پتانسیل تشعشعی نوسانی زیر بیان شود [۴]:

$$\varphi_j(x, z) = \text{Re}[-i\omega X_j \varphi_j(x, z)e^{-i\omega t}] \quad j = 1, 3 \quad (13)$$

مساله مقدار مرزی بالا نیز دارای شرایط مرزی زیر است:

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (14) \quad \text{در کل دامنه}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_j = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (15) \quad \text{در } (z=0)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (16) \quad \text{در } (z=-d)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = n_j \quad j = 1, 2, 3 \quad (17) \quad \text{روی بدنه موج شکن}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \mp ik\varphi_j = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (18) \quad \text{در دوردست}$$

در فرمول (۱۷) n_1 و n_2 بردار نرمال واحد بدنه موج شکن (به سمت داخل) بوده و برای n_3 نیز داریم:

$$n_3 = (x - x_c)n_2 - (z - z_c)n_1 \quad (19)$$

به طوری که (x_c, z_c) مرکز چرخش و یا مرکز محاسبه رول موج شکن باشد. این نقطه می تواند در مرکز جرم و یا مرکز مختصات قرار بگیرد.

۲-۲- روش جداسازی متغیرها

با در نظر صورت کلی مساله موج شکن شناور دو بعدی می توان دامنه کل را همانند شکل (۲) به سه زیر دامنه تقسیم بندی کرد.

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

معادله (۱) به معادله لاپلاس معروف است. مولفه های سرعت سیال نیز به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w \quad (2)$$

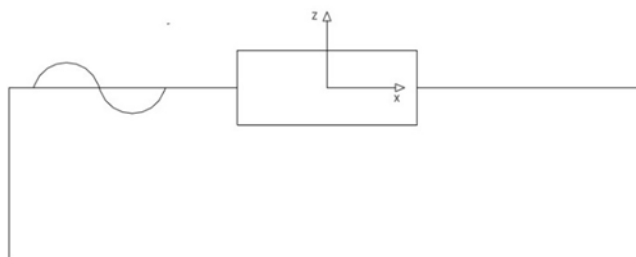
از دیگر معادله های حاکم نیز معادله برنولی است که به صورت زیر بیان می شود:

$$P = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \varphi^2 + gz \right) + c(t) \quad (3)$$

پیکربندی اصلی مساله را می توان به صورت شکل ۱ بیان کرد. فرض می شود که موج شکن در معرض موج خطی با ارتفاع H و فرکانس $\omega = \frac{2\pi}{T}$ قرار دارد.

اصولا پتانسیل نهایی را به صورت برهم نهی پتانسیل های زیر در نظر می گیرند:

۱- پتانسیل موج برخوردی ناشی از موج خطی به موج شکن بدون در نظر گرفتن وجود موج شکن در آب که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:



شکل ۱- صورت کلی مساله موج شکن شناور

$$\varphi_1(x, z, t) = \text{Re} \left[\frac{-iag \cosh k(z+d)}{\omega \cosh kd} e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad (4)$$

که در رابطه فوق:

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (5)$$

۲- پتانسیل ناشی از پخش موج برخوردی، که آن را با عنوان پتانسیل پخش شده بیان می کنند. (φ_s)

۳- پتانسیل ناشی از امواج تولید شده بوسیله حرکت شناور که به آن پتانسیل تشعشعی می گویند. (φ_r)

با توجه به اینکه مساله را به صورت دوبعدی بیان کرده ایم حرکات شناور محدود به سه حرکت رول، سوی، و هیو خواهد بود، بنابراین پتانسیل کل را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\varphi_t = \varphi_i + \varphi_s + \sum_{l=1}^3 \varphi_l^r \quad (6)$$

حال مساله کلی را به دو مساله اصلی تقسیم می کنیم و در هر قسمت با بیان فرمولاسیون مربوطه شرایط مرزی مورد نظر را نیز بیان می کنیم.

$$\Phi_i^l = \begin{cases} l = 1, 2, 3 \\ l = s \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ -\frac{iga}{\omega} e^{ik(x+b)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \end{cases} \quad (24)$$

$$\varphi_{2p} = \begin{cases} l = 1 \\ l = 2 \\ l = 3 \\ l = s \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ \frac{(z+h)^2 - x^2}{2(h-d)} \\ -\frac{3x(z+h)^2 - x^3}{6(h-d)} \\ 0 \end{cases} \quad (25)$$

بنابراین، به کمک مقادیر ویژه، پتانسیل کل در هر زیردامنه را بدست آورده شده است. بر اساس رابطه پراکندگی مقادیر ویژه در ناحیه ۲ مقادیری صریح و در ناحیه ۱ و ۳ مقادیری ضمنی خواهند بود.

$$k \tanh kh = \frac{\omega^2}{g} \quad (26)$$

$$\alpha_n \tanh \alpha_n h = -\frac{\omega^2}{g} \quad n = 2, 3, \dots \quad (27)$$

$$k \tanh kh = \frac{\omega^2}{g} \quad (28)$$

$$\beta_n \tanh \beta_n h = -\frac{\omega^2}{g} \quad n = 2, 3, \dots \quad (29)$$

$$\lambda_n = \frac{n-1}{h-d} \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

پتانسیل هایی که در بالا ارائه شد، جریان سیال را در هر زیردامنه به صورت مجزا مدل سازی کرده و کلیه شروط مرزی به غیر از شروط مرز های بین زیردامنه ها را نیز ارضا می کنند. به عنوان مثال در ناحیه ۱ پتانسیل سرعت شرط خطی سطح آزاد، شرط نفوذ ناپذیری کف، و شرط دوردست را ارضا خواهد کرد.

حال مسئله تبدیل به شناسایی ضرائب مجهول $(R_n, A_n, B_n, T_n \quad n = 1, 2, \dots)$ شده است. بایستی به این نکته نیز اشاره کرد که واحد این ضرائب بر حسب مود حرکت تشعشع متفاوت خواهد بود. این چهار ضریب از طریق اعمال شرایط مرزی بین زیردامنه ها بدست خواهند آمد. این شروط برابر بودن پتانسیل و مشتقات نرمال آن در دو سوی این مرزها هستند.

مرز بین زیردامنه ۱ و ۲ $(x = -b)$:

$$\varphi_1^l = \varphi_2^l \quad -h \leq z \leq -d \quad (31)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^l}{\partial x} = \begin{cases} V_2^l, & -d \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \varphi_2^l}{\partial x}, & -h \leq z \leq -d \end{cases} \quad (32)$$

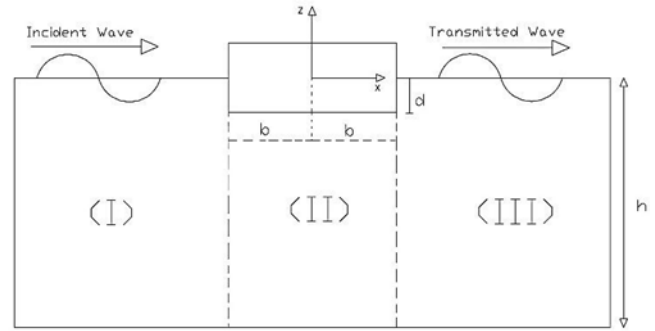
مرز بین زیردامنه ۲ و ۳ $(x = b)$:

$$\varphi_2^l = \varphi_3^l \quad -h \leq z \leq -d \quad (33)$$

$$\frac{\partial \varphi_2^l}{\partial x} = \begin{cases} V_4^l, & -d \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \varphi_3^l}{\partial x}, & -h \leq z \leq -d \end{cases} \quad (34)$$

شرایط مرزی دیواره عمودی متحرک موج شکن در $x = -b$ و $x = b$ هستند. این شرایط را می توان برای مودهای مختلف تشعشع و پتانسیل پخش به صورت زیر نوشت.

بار دیگر معادله (۶) را در نظر می گیریم. منظور از l در این معادله، مودهای حرکت تشعشع است به طوری که $l = 1 - 2 - 3$ به ترتیب بیانگر حرکات سوی، هیو و رول موج شکن شناور است. لازم به ذکر است که در این فرمولاسیون منظور از پتانسیل تفرق پتانسیل موج پخش شده (Φ_s) است. فرمولاسیون مسئله پخشی (Φ_s) و مساله تشعشع برای هر زیردامنه را می توان به صورت معادله زیر بیان کرد.



شکل ۲- مقطع مستطیل شکل و تبدیل دامنه کل به سه زیردامنه برای حل مساله تفرق و تشعشع به روش جداسازی متغیرها

$$\Phi_j^l = \text{Re}\{\varphi_j^l X_j^l\} \quad \begin{cases} l = 1 - 2 - 3 \\ j = 1 - 2 - 3 \\ l = s \end{cases} \quad (20)$$

در معادله (۲۰)، l بیانگر مود های حرکات تشعشع و $l = s$ بیانگر پتانسیل پخشی است. J نیز بیانگر زیردامنه هاست و همانطور که از شکل (۲) پیداست سه زیر دامنه وجود دارد. عبارت X نیز برای پتانسیل پخشی برابر $e^{-i\omega t}$ و برای پتانسیل تشعشع برابر سرعت مود n ام حرکت تشعشع است. با اعمال روش جداسازی متغیرها، پتانسیل های موهومی را می توان به صورت سری های متعامد برای سه زیر دامنه و به صورت زیر بیان کرد [۲].

$$\varphi_1^l = \Phi_i^l - \frac{iR_1 g}{\omega} e^{-ik(x+b)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{iR_n g}{\omega} e^{a_n(x+b)} \frac{\cos a_n(z+h)}{\cos a_n h} \quad (21)$$

$$\varphi_2^l = -\frac{igA_1 x}{\omega b} - \frac{igB_1}{\omega} + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{ig}{\omega} (A_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n(z+h) + \varphi_{2p} \quad (22)$$

$$\varphi_3^l = -\frac{igT_1}{\omega} e^{ik(x-b)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{iT_n g}{\omega} e^{-B_n(x-b)} \frac{\cos B_n(z+h)}{\cos B_n h} \quad (23)$$

که Φ_i^l و φ_{2p} از فرمولهای زیر بدست می آیند:

$$G_2(\alpha_n, h_a, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} z \cos \alpha_n(z + h_a) dz \quad (46)$$

$$G_3(\alpha_n, h_a, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \cos \alpha_n(z + h_a) dz \quad (47)$$

به طوری که $\{\beta_m, m = 1, 2, \dots\}$ و $\{\alpha_n, n = 1, 2, \dots\}$ سری متفاوت از مقادیر ویژه هستند که از روابط (۲۶-۳۰) بدست می آیند. حال می توان با استفاده از توابع ربطی که در معادلات (۴۳-۴۷) تعریف شد، معادلات شرط مرزی بین زیر دامنه ها که در معادلات (۳۱-۳۴) به آن اشاره شد را باز نویسی کرد.

۱- شرط مرزی اول معادل با روابط (۳۱ و ۳۹)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{R_n}{\cos \alpha_n h} E(\alpha_n, \lambda_m, h, h, -h, -d) \right] - (\theta_m^1 A_m e^{-\lambda_m b} + B e^{\lambda_m b}) N(\lambda_m, h, -h, -d) = \frac{i\omega}{g} H_{1m}^l \quad (48)$$

به طوریکه:

$$\theta_m^1 = \begin{cases} -1, & m = 1 \\ 1, & m \geq 2 \end{cases} \quad (49)$$

$$H_{1m}^l = \begin{cases} 0, & l = 1 \\ \frac{G_1(\lambda_m, h, -h, -d) - b^2 G_3(\lambda_m, h, -h, -d)}{2(h-d)}, & l = 2 \\ \frac{3b G_1(\lambda_m, h, -h, -d) - b^3 G_3(\lambda_m, h, -h, -d)}{6(h-d)}, & l = 3 \\ \frac{iga}{\omega} \frac{E(\alpha_n, \lambda_m, h, h, -h, -d)}{\cos \alpha_1 h}, & l = s \end{cases} \quad (50)$$

۲- شرط مرزی دوم معادل با روابط (۳۲ و ۴۰)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\theta_n^2 A_n e^{-\lambda_n b} - \lambda_n B_n e^{\lambda_n b}) E(\lambda_n, \alpha_m, h, h, -h, -d) \right] + \left(\frac{R_m a_m}{\cos \alpha_m h} \right) N(\alpha_m, h, -h, 0) = \frac{i\omega}{g} H_{2m}^l \quad (51)$$

به طوریکه:

$$\theta_m^2 = \begin{cases} \frac{1}{b}, & m = 1 \\ \lambda_m, & m \geq 2 \end{cases} \quad (52)$$

$$\theta_m^3 = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m \geq 2 \end{cases} \quad (53)$$

(۵۴)

$$H_{2m}^l = \begin{cases} G_3(a_m, h, -d, 0), & l = 1 \\ \frac{b}{h-d} G_3(a_m, h, -h, -d), & l = 2 \\ G_2(a_m, h, -d, 0) - \frac{G_1(a_m, h, -h, -d) - b^2 G_3(a_m, h, -h, -d)}{2(h-d)}, & l = 3 \\ -\frac{ig}{\omega} \theta_m^3 a_m \frac{N(a_m, h, -h, 0)}{\cos \alpha_m h}, & l = s \end{cases} \quad (54)$$

$$V_2^l = V_4^l = \begin{cases} 1, & l = 1 \\ 0, & l = 2 \\ z, & l = 3 \\ 0, & l = s \end{cases} \quad (35)$$

شرایط مرزی ارائه شده در معادلات (۳۱-۳۴) با ضرب توابع ویژه مناسب در شرایط مرزی هر طرف و سپس انتگرال گیری بر روی تقسیمات Z با تقریب کمترین مربعات ارضا خواهند شد. با توجه به معادلات (۲۶-۳۰) می توان گفت:

$$\alpha_1 = -ik \quad (36)$$

$$\beta_1 = -ik \quad (37)$$

از طرفی با توجه به قواعد مثلثات به سادگی می توان رابطه زیر را اثبات کرد:

$$\cos(-ix) = \cosh(x) \quad (38)$$

اکنون می توان مقادیر ویژه و پتانسیل ها را به صورت همه جانبه تر بیان کرد. با توجه به معادلات (۳۶-۳۸) شروط مرزی بین زیردامنه ها بوسیله انتگرال های زیر ارضا می شوند:

۱- شرط مرزی اول : معادله (۳۱) تبدیل خواهد شد به:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{R_n}{\cos \alpha_n h} E(\alpha_n, \lambda_m, h, h, -h, -d) \right] - (\theta_m^1 A_m e^{-\lambda_m b} + B e^{\lambda_m b}) N(\lambda_m, h, -h, -d) = \frac{i\omega}{g} H_{1m}^l \quad (39)$$

۲- شرط مرزی دوم : معادله (۳۲) تبدیل خواهد شد به:

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1^l}{\partial x} \{ \cos \alpha_m(z+h), m = 1, 2, \dots \} dz = \int_{-h}^0 \left\{ \frac{V_2^l}{\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x}}, -d \leq z \leq 0 \right\} \{ \cos \alpha_m(z+h), m = 1, 2, \dots \} dz \quad (40)$$

۳- شرط مرزی سوم : معادله (۳۳) تبدیل خواهد شد به:

$$\int_{-h}^{-d} \phi_2^l \{ \cos \lambda_m(z+h), m = 1, 2, \dots \} dz = \int_{-h}^{-d} \phi_3^l \{ \cos \lambda_m(z+h), m = 1, 2, \dots \} dz \quad (41)$$

۴- شرط مرزی چهارم : در نهایت معادله (۳۴) تبدیل خواهد شد به:

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_3^l}{\partial x} \{ \cos B_m(z+h), m = 1, 2, \dots \} dz = \int_{-h}^0 \left\{ \frac{V_4^l}{\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x}}, -d \leq z \leq 0 \right\} \{ \cos B_m(z+h), m = 1, 2, \dots \} dz \quad (42)$$

به منظور ساده سازی فرمولاسیون، توابع ربط دهنده زیر تعریف شده اند:

$$E(\alpha_n, \beta_m, h_a, h_b, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} [\cos \alpha_n(z + h_a) \cos \beta_m(z + h_b)] dz \quad (43)$$

$$N(\alpha_n, h_a, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} [\cos \alpha_n(z + h_a)]^2 dz \quad (44)$$

$$G_1(\alpha_n, h_a, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} [z + h_a]^2 \cos \alpha_n(z + h_a) dz \quad (45)$$

آید، حاصل خواهند شد. در صورت خطی سازی فرمولاسیون نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$P^l = -\rho \frac{\partial \Phi^l}{\partial t} = i\omega \rho \phi^l \dot{X}_l \quad l = 1, 2, 3 \quad (61) \quad \text{برای تشعشع}$$

$$P = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\omega \rho \phi^s e^{-i\omega t} \quad (62) \quad \text{برای تفرق}$$

انتگرال گیری از فشار بر روی سطح خیس شده موج شکن، نیروها و ممان هایی که مرتبط با مسئله پتانسیل پخشی و یا پتانسیل تشعشع هستند را نتیجه خواهد داد.

در صورت انتگرال گیری برای مساله پتانسیل پخشی، نیروها و ممانهای تحریک بدست خواهند آمد. در ادامه نیروهای افقی و عمودی و ممان وارده بر موج شکن بر اثر پتانسیل پخشی استخراج خواهند شد. نیروی افقی را میتوان به صورت زیر ارائه کرد:

$$F_{sx} = \rho g \sum_{n=1}^N (a\theta_n^3 + R_n - T_n) \frac{\sin a_n h - \sin a_n (h-d)}{a_n \cos a_n h} \quad (63)$$

نیروی عمودی و ممان حول ($x = z = 0$) حاصل از پتانسیل تفرق نیز به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$F_{sz} = \rho g \left[2B_1 b + \sum_{n=2}^N \frac{2}{\lambda_n} (A_n + B_n) \sinh \lambda_n b \cos \lambda_n (h-d) \right] \quad (64)$$

$$M_{s,x=z=0} = \rho g \sum_{n=1}^N \left[\frac{a\theta_n^3 + R_n - T_n}{\cos a_n h} \left(\frac{\cos a_n h - \cos a_n (h-d)}{a_n^2} + \frac{d \sin a_n (h-d)}{a_n} \right) \right] - \rho g \left(\frac{2}{3} A_1 b^2 + \sum_{n=2}^N \left[(A_n - B_n) \frac{\lambda_n b - 1}{\lambda_n^2} e^{\lambda_n b} + (A_n - B_n) \frac{\lambda_n b + 1}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n b} \right] \cos \lambda_n (h-d) \right) \quad (65)$$

۲-۳-۲ - جرم اضافه و ضرایب میرایی تشعشعی

پاسخ هیدرودینامیکی مرتبط با حرکت تشعشع را می توان در یک قسمت متناسب با شتاب موج شکن و یک قسمت متناسب با سرعت موج شکن به صورت زیر نوشت:

$$F_j = -a_{jl} \ddot{X}_l - b_{jl} \dot{X}_l \quad (66)$$

ضرایب a_{jl} و b_{jl} را به ترتیب ضرایب جرم اضافی و میرایی می نامند. انتگرال گیری از فشار مربوط به هر مساله تشعشع منجر به بدست آوردن ضرایب یاد شده برای هر حرکت تشعشع خواهد شد. برای حرکت سوی ($l = 1$) رابطه زیر برقرار است:

$$a_{11} + \frac{ib_{11}}{\omega} = -\frac{i\rho g}{\omega} \sum_{n=1}^N (R_n - T_n) \frac{\sin a_n h - \sin a_n (h-d)}{a_n \cos a_n h} \quad (67)$$

برای حرکت هیو ($l = 2$) رابطه (۶۸) و برای حرکت رول نیز رابطه (۶۹) برقرار خواهند بود:

۳- شرط مرزی سوم معادل با روابط (۳۳ و ۴۱):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{T_n}{\cos B_n h} E(B_n, \lambda_m, h, h, -h, -d) \right] - (A_m e^{\lambda_m b} + B_m e^{-\lambda_m b}) N(\lambda_m, h, -h, -d) = \frac{i\omega}{g} H_{3m}^l \quad (55)$$

به طوری که:

$$H_{3m}^l = \begin{cases} 0 & , l = 1 \\ H_{1m}^l & , l = 2 \\ -H_{1m}^l & , l = 3 \\ 0 & , l = s \end{cases} \quad (56)$$

۴- شرط مرزی چهارم معادل با روابط (۳۴ و ۴۲):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\theta_n^2 A_n e^{\lambda_n b} - \lambda_n B_n e^{-\lambda_n b}) E(\lambda_n, B_m, h, h, -h, -d) \right] - \left(\frac{T_m B_m}{\cos B_m h} \right) N(B_m, h, -h, 0) = \frac{i\omega}{g} H_{4m}^l \quad (57)$$

به طوری که:

$$H_{4m}^l = \begin{cases} H_{2m}^l & l = 1 \\ -H_{2m}^l & l = 2 \\ H_{2m}^l & l = 3 \\ 0 & l = s \end{cases} \quad (58)$$

به منظور یافتن پاسخ، بایستی سری محدود توابع متعامد را کوتاه کرد. بدین منظور فرض می شود N تعداد توابع متعامدی است که در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب $4N$ معادله مختلط و به همین تعداد ضرایب مجهول وجود خواهد داشت. در صورتی که ضرایب درون ماتریس مرتب شوند، آنگاه می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$S.X = F \quad (59)$$

به طوری که:

$$(60)$$

$$X = \frac{-ig}{\omega} (R_1, R_2, \dots, R_N, A_1, A_2, \dots, A_N, B_1, B_2, \dots, B_N, \\ = (R'_1, R'_2, \dots, R'_N, A'_1, A'_2, \dots, A'_N, B'_1, B'_2, \dots, B'_N)$$

معادله (۵۹) برای سه مود حرکتی تشعشع و یک مود پخشی نوشته می شود. ماتریس F با توجه به شرایط مرزی بین زیر دامنه ها تعیین خواهد شد و بنابراین می توان برای هر مود، ضرایب مربوط و یا ماتریس X را بدست آورد. با اعمال ضرایب در معادلات پتانسیل زیر دامنه ها (معادلات ۲۳-۲۱) پتانسیل هر زیر دامنه حاصل خواهد شد.

۲-۳-۲ ویژگی های هیدرودینامیکی

۲-۳-۱- نیروها و ضرایب هیدرودینامیکی

نیروهایی که در اثر موج و یا حرکت موج ایجاد می شوند با انتگرال گیری از فشار دینامیکی که از رابطه برنولی بدست می -

در معادله (۷۳) منظور از C, C_g به ترتیب، سرعت گروهی موج و سرعت فاز است همچنین برای E نیز عبارت زیر تعریف شده است:

$$E = 1/2 \rho g A_I^2 \quad (74)$$

به طوری که منظور از A_I دامنه موج برخوردی است. اغلب نیروی دریافت بوسیله فاکتور $\xi = 2 \frac{Ec_g}{c}$ بی بعد می شود. از آنجایی که نیروی دریافت برابر تغییرات مومنتم در راستای x در مساله حاضر است، می توان نتیجه گرفت نیروی دریافت زمانی برابر فاکتور بی بعد سازی ξ می شود که موج برخوردی به طور کامل بازگردانده شود. در نتیجه نیروی دریافت بی بعد بایستی همواره کوچکتر مساوی ۱ باشد.

۳- برنامه کامپیوتری و اعتبار سنجی

۳-۱- اعتبار سنجی

بر اساس فرمولاسیون و آنچه در بخش ۲ به تفصیل در خصوص آن بحث گردید، برنامه کامپیوتری به زبان متلب فراهم آمد که ورودی های اصلی این برنامه مشخصات موج شکن، عمق آب، تعداد جملات سری متعامد (N) و خروجی آن نیز مشخصات هیدرودینامیکی موج شکن و موج حاصل می باشند. شکل ۳ بیانگر ضرائب جرم اضافه و میرایی برای مقطعی مستطیل شکل با نسبت $h/d = 3, b/d = 0.5$ می باشد. نتایج با کارهای انجام شده توسط ژنگ و همکاران (۲۰۰۳) مقایسه شده اند. در ضمن همگی ضرائب بی بعد شده اند.

شکل های ۳ الف و ب به ترتیب بیانگر ضریب جرم اضافه و میرایی برای حرکت سوی است. شکل های ۳ ج و د نیز به ترتیب بیانگر ضرایب جرم اضافه و میرایی برای حرکت هیو می باشد. شکل های ۳ ه و و نیز به ترتیب ضرائب جرم اضافه و میرایی را برای حرکت رول حول مبدا مختصات (۰,۰) نشان می دهند.

شکل ۴ نشان دهنده نیروهای وارد بر موج شکن بر اثر پتانسیل پخشی و پتانسیل موج برخوردی است. نتایج برای نسبت های $h/d = 2, b/d = 1,3$ نشان داده شده اند. همانند قسمت قبل نتایج با نتایج ژنگ و همکاران (۲۰۰۳) مقایسه شده اند و تطابق خوبی نیز بین داده ها مشاهده می شود.

$$a_{22} + \frac{ib_{22}}{\omega} = -\frac{i\rho g}{\omega} \left[2B_1b + \sum_{n=2}^N \frac{2}{\lambda_n} (A_n + B_n) \sinh \lambda_n b \cos \lambda_n (h-d) \right] + \rho \frac{3(h-d)^2 b - b^3}{3(h-d)} \quad (68)$$

$$a_{33} + \frac{ib_{33}}{\omega} = -\frac{i\rho g}{\omega} \sum_{n=1}^N \left[\frac{R_n - T_n}{\cos a_n h} \left(\frac{\cos a_n h - \cos a_n (h-d)}{a_n^2} + \frac{d \sin a_n (h-d)}{a_n} \right) \right] + \frac{i\rho g}{\omega} \left(\frac{2}{3} A_1 b^2 + \sum_{n=2}^N \left[(A_n - B_n) \frac{\lambda_n b - 1}{\lambda_n^2} e^{\lambda_n b} + (A_n - B_n) \frac{\lambda_n b + 1}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n b} \right] \cos \lambda_n (h-d) \right) + \rho \frac{5(h-d)^2 b^3 - b^5}{15(h-d)} \quad (69)$$

با توجه به رابطه هاسکینند (که نتیجه ای از تساوی گرین است) می توان نیروهای پتانسیل پخشی را از حل پتانسیل تشعشع بدست آورد. با اعمال این معادله، رابطه زیر برای نیروهای ناشی از پتانسیل پخشی بدست می آید:

$$F_l = -\frac{\rho g^2 A}{\omega} k R_1^l \frac{h(1 + \frac{\sinh 2kh}{2kh})}{(\cosh kh)^2}, \quad l = 1, 2, 3 \quad (70)$$

۳-۳-۲- ضرائب بازتاب و گذردهی

ضریب بازتاب R_W به صورت نسبت دامنه موج برگشتی به موج برخوردی تعریف می شود. در این مطالعه دامنه موج برگشتی برابر دامنه موج پخشی در زیردامنه ۳ است. با توجه به معادله خطی برنولی می توان عبارت زیر را برای ضریب بازتاب بدست آورد:

$$R_W = \frac{|i\omega B_{1D}' \cosh kh|}{gA} \quad (71)$$

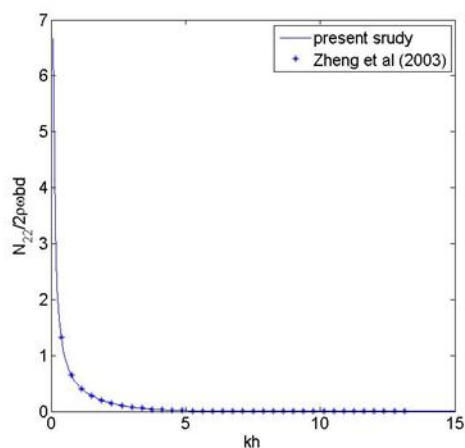
به طور مشابه ضریب گذردهی T_W به صورت نسبت دامنه موج عبوری به دامنه موج برخوردی تعریف می شود. در این مساله پتانسیل موج عبوری برابر پتانسیل موج پخشی در ناحیه ۱ بعلاوه پتانسیل موج برخوردی است. با توجه به معادله خطی شده برنولی، می توان عبارت زیر را برای ضریب گذردهی بدست آورد:

$$T_W = 1 - \frac{|i\omega R_{1D}' \cosh kh|}{gA e^{ikb}} \quad (72)$$

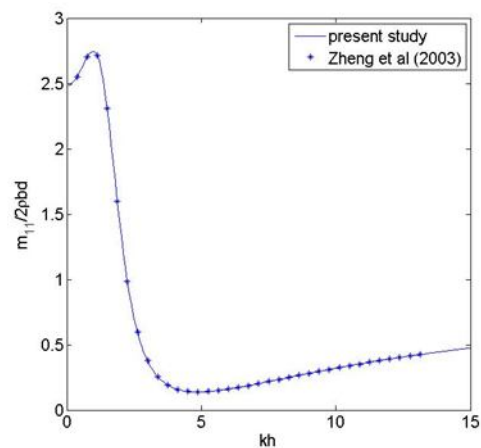
۳-۳-۲- نیروی دریافت متوسط

برای سازه های دو بعدی نیروی دریافت افقی توسط لانگت و هیگینز (۱۹۷۷) به صورت تابعی از ضریب بازتاب و گذردهی و به صورت معادله (۷۳) تعریف می شود. تساوی دوم این معادله با فرض عدم اتلاف انرژی ($T_W^2 + R_W^2 = 1$) بدست آمده است.

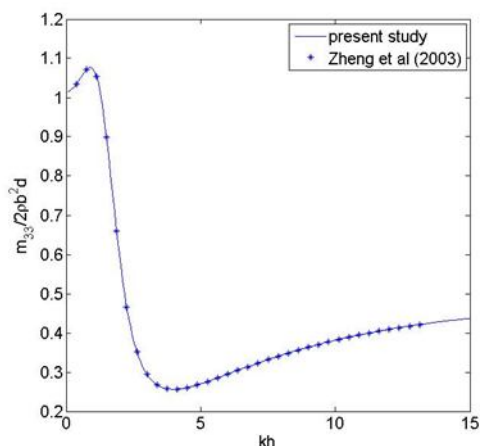
$$F_{drift} = \frac{Ec_g}{c} (1 + R_W^2 - T_W^2) = 2 \frac{Ec_g}{c} R_W^2 \quad (73)$$



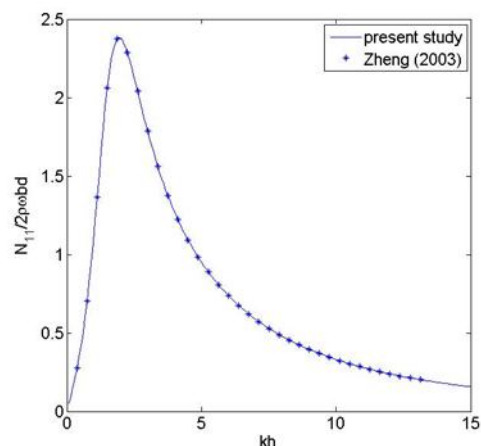
(د)



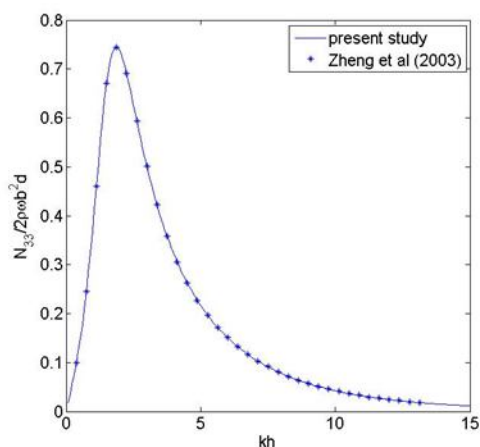
(الف)



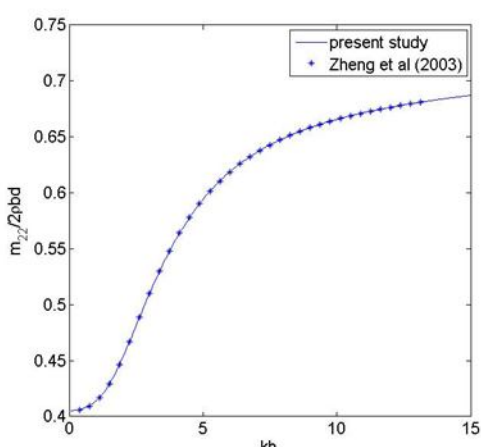
(ه)



(ب)



(و)

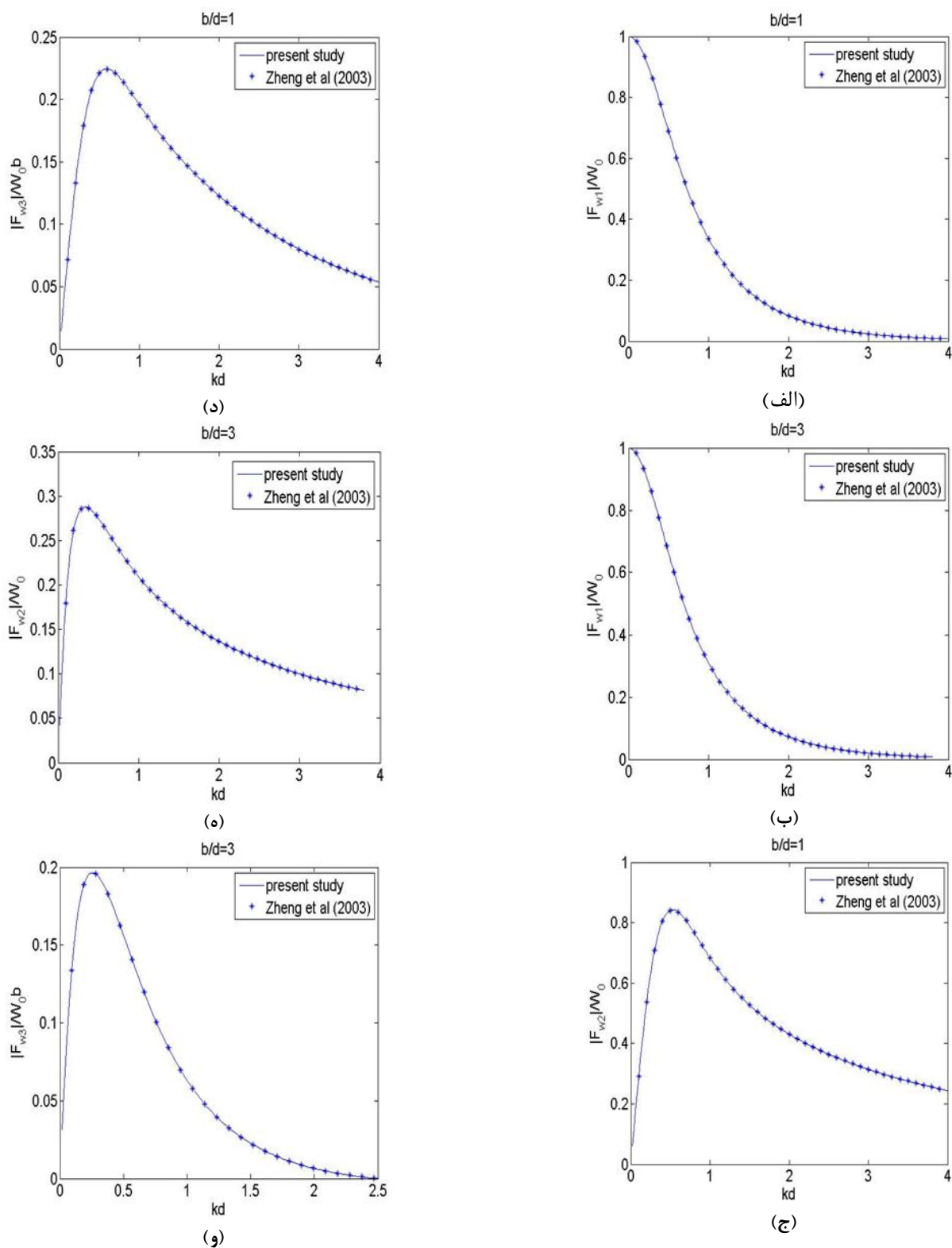


(ج)

شکل ۳- ضرائب بی بعد جرم اضافه و میرایی برای موج شکن دو بعدی با مقطع مستطیلی ($h/d = 3, b/d = 0.5$)

اندک است. می توان فرض دو بعدی بودن موج را عامل این تغییرات کم دانست. شکل های ۴.۵ و ۴.۶ نیز بیانگر ممان رول ایجاد شده حول مبدا مختصات (۰,۰) در اثر برخورد موج می باشند. لازم به ذکر است در اعتبار سنجی خروجی ها، از تعداد ۴۰ جمله سری نامتناهی مطابق مرجع [۱] استفاده شده و به همین دلیل نتایج کاملاً بر هم منطبق شده اند.

شکل های ۴ الف و ب نشان دهنده نیروی افقی موج بر مقطع مستطیلی شکل برای نسبت های $\frac{b}{d} = 1, 3$ می باشد. فاکتور بی بعدسازی برابر $w_0 = 2\rho g A b$ می باشد که برای حرکت رول این فاکتور برابر $w_1 = 2\rho g A b^2 = w_0 b$ می باشد. شکل های ۴ ج و د نیز بیانگر نیروی عمودی موج وارد بر موج شکن است. همانطور که پیداست، تاثیر پارامتر $\frac{b}{d}$ در نیروی عمودی بسیار

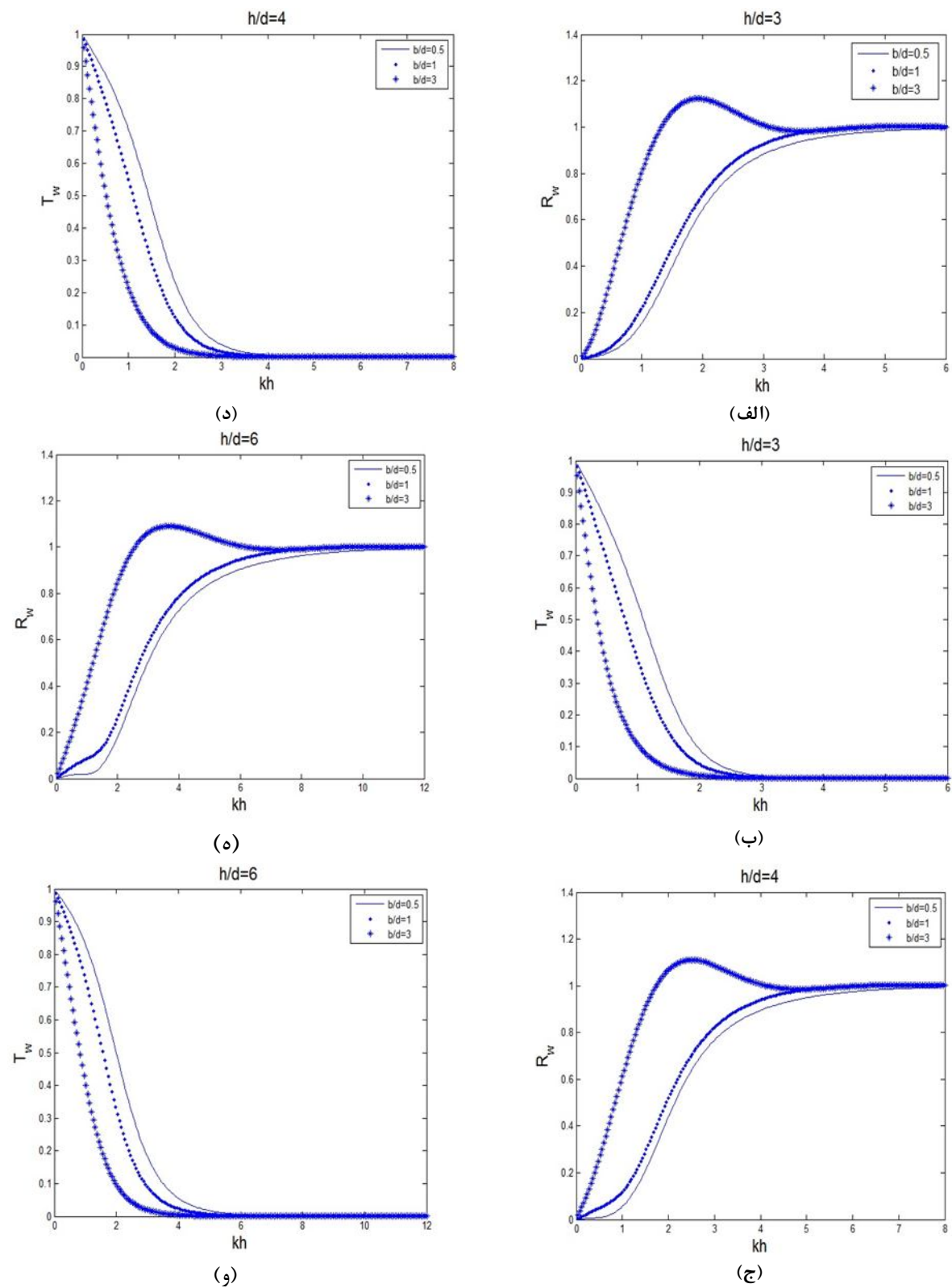


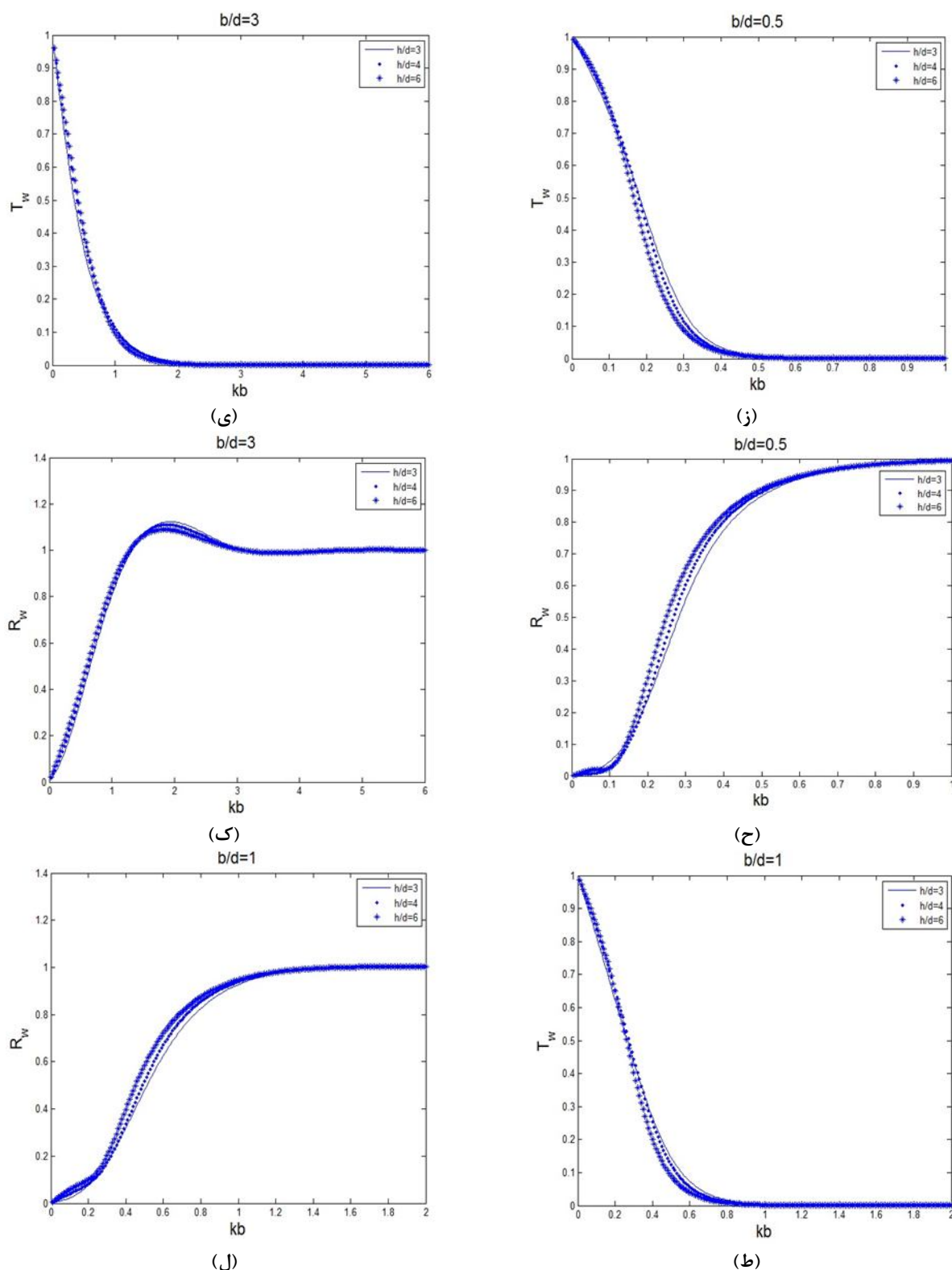
شکل ۴- نیرو و ممان حاصل از موج برای موج شکن دو بعدی با مقطع مستطیلی ($\frac{h}{d} = 2, \frac{b}{d} = 1, 3$)

از شکل ۵ (ز- ل) نیز می توان دریافت که افزایش عمق آب نیز باعث کاهش ضریب گذردهی و افزایش ضریب بازتاب خواهد شد. با این حال، تاثیر پارامتر b/d بسیار محسوس تر از پارامتر h/d که نشان دهنده عمق آب است، می باشد.

۳-۱- مطالعه پارامتری

شکل ۵ تاثیر پارامترهای ابعاد موج شکن شناور و عمق آب را به صورت بی بعد بر روی ضرایب بازتاب و گذردهی نشان می دهد. می توان از شکل ۵ (الف- ه) نتیجه گرفت که با افزایش b/d ضریب گذردهی کاهش، و ضریب بازتاب افزایش می یابند.

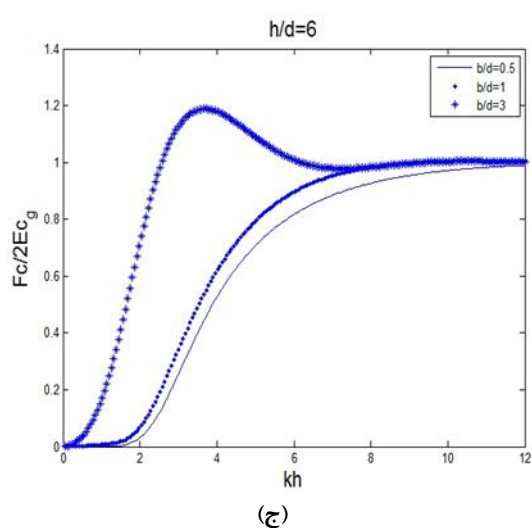
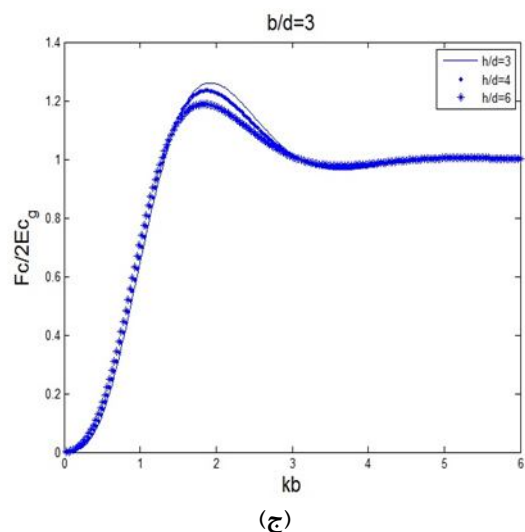
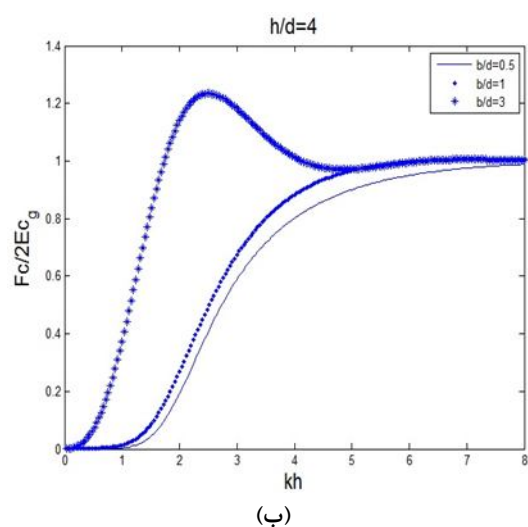
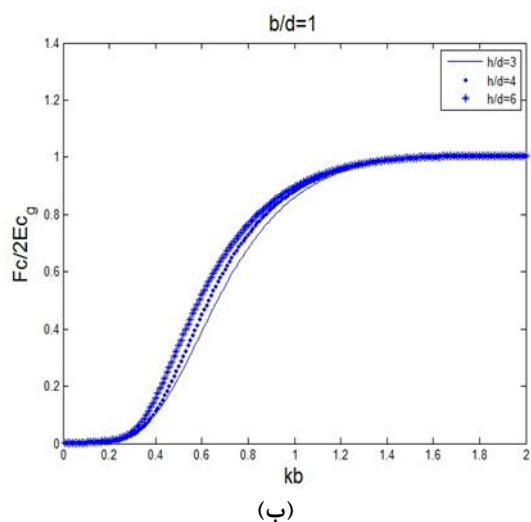
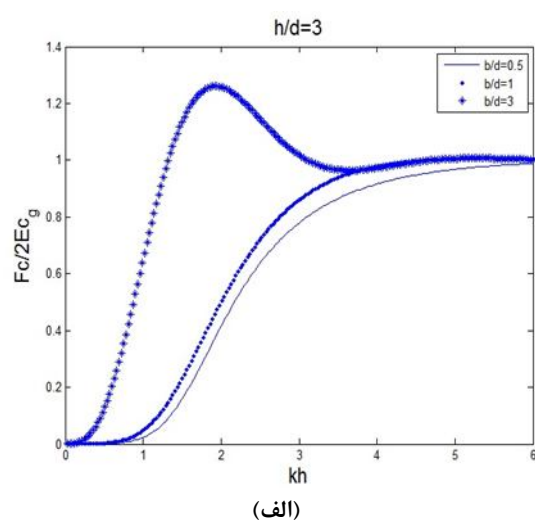
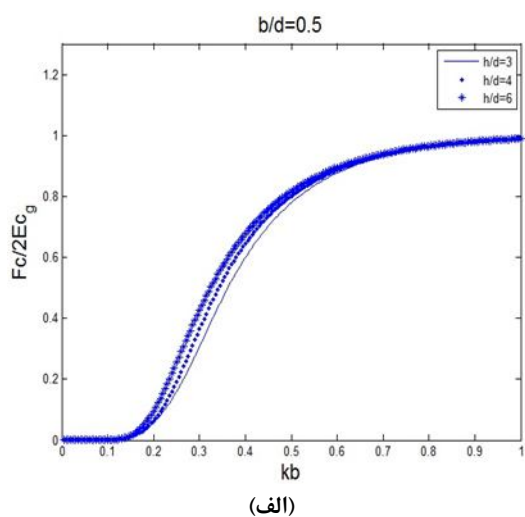




شکل ۵- ضرایب بازتاب و گذردهی برای موج شکنی با نسبت های مختلف b/d در عمق های مختلف آب، (الف-ه) و ضرایب بازتاب و گذردهی برای موج شکن شناور در عمق های مختلف در نسبت های مختلف b/d (ز-ل)

افزایش b/d در عمق های مختلف آب، نیروی دریافت وارد بر موج شکن شناور افزایش می یابد. از شکل ۷ نیز می توان نتیجه گرفت که پارامتر عمق آب نیز باعث افزایش نیروی دریافت خواهد شد. با این حال تاثیر پارامتر عمق آب بر روی نیروی دریافت به نسبت ابعاد موج شکن بسیار کمتر است.

با توجه انگت و هیگینز (۱۹۷۷) و همچنین فرض عدم اتلاف انرژی و با توجه به معادله (۷۳) می توان نیروی متوسط دریافت بر موج- شکن را در نسبت های مختلف b/d و h/d به صورت شکل های ۶ و ۷ نشان داد. عبارت $\frac{Fc}{2Ec_g}$ برابر نیروی دریافت بی بعد است که از معادله (۷۳) حاصل شده است. از شکل ۶ می توان دریافت که با



شکل ۷- نیروی دررفت متوسط برای موج شکن شناور در عمق های مختلف و در نسبت های مختلف b/d

شکل ۶- نیروی دررفت متوسط برای موج شکن شناور در نسبت های مختلف b/d و در عمق های مختلف

۴- نتیجه گیری

در این مقاله مساله موج شکن شناور با مقطع مستطیلی در دو بعد مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد و در این راستا از روش جداسازی متغیرها به عنوان روشی تحلیلی استفاده می شود. در این روش پس از تقسیم دامنه کل مساله به زیر دامنه های جداگانه و تخمین پتانسیل های تفرد و تشعشع در هر زیردامنه بوسیله سری های متعامد، شرایط مرزی بین زیر دامنه ها ارضا شده و در پی آن ضرایب مجهول موجود در عبارات پتانسیل بدست می آیند. پس از استخراج پتانسیل های هر زیر دامنه ضرائب جرم اضافه، میرایی و نیرو های وارد بر موج شکن بدست آورده می شوند. در فرآیند این مطالعه معادلات و روش حل مطرح شده توسط سایر محققین مورد استفاده قرار گرفته و پس از ارضای شروط مرزی بین زیردامنه ها و بدست آوردن پتانسیل کل، نتایج مورد اعتبار سنجی قرار گرفته اند. پس از آن بوسیله رابطه خطی شده برنولی، ضرائب گذردهی و بازتاب برای موج شکن بدست آورده شده و این ضرایب مورد مطالعه پارامتری که هدف اصلی این مقاله بوده است قرار گرفته است. پارامترهای h/d و b/d که به ترتیب نمایانگر عمق و ابعاد موج شکن هستند، مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج نشان می دهند که تاثیر پارامتر b/d به مراتب از پارامتر h/d بر روی ضرایب بازتاب، گذردهی و نیروی دریافت بیشتر بوده و با افزایش آن ضریب بازتاب و نیروی دریافت افزایش، و ضریب گذردهی کاهش میابند.

۶- مراجع

- 1- Zheng. Y.H, You. Y.G, Shen Y.M, (2003), *on the radiation and diffraction of water waves by a rectangular buoy*, Ocean Eng., Vol.33(8),1063-1082
- 2- Johansson. M., "Barrier-Type Breakwaters, (1989), *Transmission, Reflection and Forces*, PHD Thesis, Department of Hydraulics Chalmers University of Technology
- 3- Wu. G.X, Eatock Taylor. R, (2002), *the coupled finite element and boundary element analysis of nonlinear interactions between waves and bodies*, Ocean Eng., Vol.30, 378-400
- 4- Sannasiraj S. A., Sunder V., Sundaravadivelu R., (1996), *Mooring Forces and Motion Responses of Pontoon-Type Floating Breakwaters*, Ocean Eng., Vol.25(1), 27-48
- 5- Chen. Z.J, Wang. Y.X, Dong. H.Y, Zheng.B, (2012), *Time domain hydrodynamic analysis of pontoon-plate floating breakwater*, Journal of Water Science and Eng, Vol.5(3),291-303
- 6- Shen Y.M, Zheng. Y.H, You. Y.G, (2004), *On the radiation and diffraction of linear water waves by a rectangular structure over a still part 1 infinite domain of finite water depth*, Ocean Eng., Vol.32(8), 1073-1079
- 7- A.Abul-Azm, M. Gesraha, (2000), *Approximation to the hydrodynamics of floating pontoons under oblique waves*, Ocean Engineering, Vol.27(4), 365-384
- 8- Tabatabai,S.M, Zeraatgar. H, Ketabdari. J, Rezanezhad. J, (2012), *Hydrodynamic analysis of moored floating breakwater using FEM*, 13th marine industries conference (In Persian).