

بررسی پارامتریک رولینگ کشتی در امواج نامنظم

معین بزرگ زاده^۱، محمدرضا زارعی^{۲*}

^۱ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد معماری کشتی، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار

^۲ استادیار، گروه مهندسی دریا، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، mrzareei@cmu.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
هدف اصلی این مقاله بررسی تصادفی حرکت رول کشتی در امواج نامنظم است. برای دستیابی به این هدف معادله دیفرانسیل حرکت رول کشتی در امواج طولی با لحاظ میرایی و بازوی بازگرداننده غیرخطی ایجاد شده است. به دلیل ماهیت تصادفی امواج دریا، نیروی تحریک موج از طریق تحریک تصادفی نامنظم با استفاده از تئوری موج مؤثر تولید گردیده است. برای دستیابی به پاسخ حرکت رول کشتی، معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت رول به شکل معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو تبدیل شده است. معادله ایجاد شده به‌دفعات با استفاده از روند مونت‌کارلو حل شده تا پاسخ حرکت رول به‌صورت آماری بررسی گردد. در انتها، تابع توزیع احتمال حرکت رول کشتی در امواج نامنظم برای کشتی کانتینربر C11، به‌عنوان کشتی نمونه، محاسبه شده است. با استفاده از این نتایج می‌توان تقریب بهتری از حداکثر زاویه حرکت رول کشتی در امواج نامنظم ارائه داد.	نارنجچه مقاله: تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۱ کلمات کلیدی: پایداری کشتی پارامتریک رولینگ امواج نامنظم کشتی کانتینربر C11

Investigation parametric rolling of ships under irregular waves

Moein Bozorg Zadeh¹, Mohammad Reza Zareei^{2*}

¹ Msc in naval architecture, Chabahar Maritime University

² Assistant professor, marine engineering faculty, Chabahar Maritime University, mrzareei@cmu.ac.ir

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 20 Jun 2022

Accepted: 03 Oct 2022

Keywords:

Ship stability
Parametric rolling
Irregular waves
C11 container ship

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to investigate the stochastic roll motion of a ship in irregular waves. To achieve this goal, the differential equation of ship roll motion roll in longitudinal waves with respect to nonlinear damping and restoring arm has been created. Due to the stochastic nature of sea waves, the wave excitation force is generated through stochastic excitation using effective wave theory. To achieve the ship roll motion response, the stochastic differential equation of the roll is converted to the Ito's stochastic differential equation form. The generated equation is solved several times using the Monte Carlo process to statistically evaluate the roll motion response. Finally, the probability distribution function of the ship's roll motion at irregular waves is calculated for the C11 container ship as a sample ship. Using these results, a better approximation of the maximum angle of roll motion of a ship in irregular waves can be obtained.

۱ - مقدمه

انجام شده است. تاکید عمده مهندسان دریا در بحث پایداری کشتی همیشه بر روی پایداری استاتیکی کشتی بوده، ولی در دهه‌های اخیر بحث پایداری دینامیکی کشتی توجه گسترده‌ای را به خود جلب کرده است. وقوع پدیده پارامتریک رولینگ در اثر امواج در راستای طولی کشتی ممکن است سبب ایجاد زوایای رول بزرگ در کشتی و در نتیجه ناپایداری آن یا آسیب به کشتی و بار

پایداری کشتی همیشه یکی از موضوعات مهم در زمینه ساخت و طراحی کشتی برای مهندسان دریا بوده است. در این زمینه حرکت غلتش عرضی کشتی به نام حرکت رول به دلیل اهمیت قابل‌توجه آن در بحث پایداری به‌صورت ویژه مدنظر بوده و تحقیقات گسترده‌ای در خصوص تأثیر این حرکت بر روی پایداری کشتی

مربوط به آسیب‌دیدگی این کشتی‌ها بعد از حادثه آورده شده است. بررسی موارد وقوع پارامتریک رولینگ نشان می‌دهد که این پدیده از اهمیت قابل‌توجهی برای کشتی‌ها برخوردار است و در زمان طراحی و حتی ناوبری کشتی باید تمهیداتی برای کاهش تأثیرات مخرب آن در نظر گرفته شود.



(الف)



(ب)

شکل ۱- تصاویر کشتی‌های کانترینر بر بعد از پدیده پارامتریک رولینگ،
الف- کشتی APL England [5]، ب- کشتی One Apus [6]

به دلیل اهمیت پدیده پارامتریک رولینگ تحقیقات متعددی بر روی این پدیده در دو دهه اخیر انجام شده است. تحقیقات داخلی انجام‌شده در این زمینه بسیار محدود است. در سال ۱۳۸۳ انشایی و زراعتگر [7] نرم‌افزاری را برای تحلیل پارامتریک رولینگ در امواج منظم ارائه دادند. آن‌ها با حل معادله ۱ درجه آزادی به‌روش ماتئو، پاسخ حرکت رول یک مدل کشتی کانترینر بر را محاسبه و بر اساس آن پدیده پارامتریک رولینگ را پیش‌بینی نمودند. در سال ۱۳۸۶ شعبانی و سیف [8] نیز تحقیق مشابهی ارائه دادند. جهانبخش و مسعودی در سال ۱۳۹۴ [9] و مسعودی در سال ۲۰۱۷ [10] دستورالعمل موقت نسل دوم پایداری کشتی‌ها در حالت سالم مربوط به سازمان بین‌المللی دریانوردی را بترتیب بر

گردد. امواجی که در راستای طولی کشتی منتشر می‌شوند سبب ایجاد ممان حرکت رول نخواهند شد، اما کم بودن میرایی حرکت رول کشتی به همراه تغییرات ممان بازگرداننده حرکت رول در موج امکان وقوع پدیده پارامتریک رولینگ را در کشتی ایجاد می‌کند [1]. در بررسی پارامتریک رولینگ در امواج منظم، معادله حرکت رول کشتی را میتوان با مدلسازی ممان بازگرداننده از طریق رابطه ماتئو تحلیل کرد. این روش مدلسازی در برخی از آیین‌نامه‌های موسسات رده‌بندی نظیر راهنمای بررسی پارامتریک رولینگ در کشتی‌های کانترینر مربوط به موسسه رده‌بندی ABS [2] مورد استفاده قرار گرفته است. در امواج نامنظم نیز تغییرات ممان بازگرداننده امکان وقوع پدیده پارامتریک رولینگ را مشخص میکند، اما در این حالت بدلیل ماهیت تصادفی بودن امواج، باید پاسخ حرکت رول کشتی بصورت آماری مورد بررسی قرار گیرد [3]. موارد متعددی از وقوع پدیده پارامتریک رولینگ در طول چند دهه گذشته گزارش شده است. در اکتبر ۱۹۹۸، APL China کشتی کانترینر پست - پاناما کس از کلاس C11 با طول ۲۶۰ متر و عرض ۴۰ متر از کاوشینگ تایوان در حال حرکت به سمت سیاتل ایالات متحده بود درحالی‌که حدود ۴۰۰۰ کانترینر را حمل می‌کرد. در خارج از جزایر آلوتای آلاسکا، این کشتی دچار طوفانی شدید شد که بیش از ۱۲ ساعت طول کشید. علاوه بر طوفان شدید، حرکات بسیار بزرگ در بدترین قسمت طوفان وضعیت را برای کشتی بحرانی‌تر کرد. ایجاد حرکات هیو و پیچ بزرگ در کشتی با دامنه زیاد علاوه بر وقوع زاویه رول حدود ۳۵ تا ۴۰ درجه، این حادثه را به یکی از بزرگ‌ترین حوادث ناشی از پارامتریک رولینگ در تاریخ تبدیل کرد. روز بعد از حادثه میزان خسارت برآورد شد: یک‌چهارم از ۱۳۰۰ کانترینر روی عرشه کشتی ازدست‌رفته بود و تقریباً تعداد مشابهی نیز شدت آسیب‌دیده بود، خود کشتی نیز دچار آسیب‌سازهای شد [4]. گفته می‌شود که این بزرگ‌ترین فاجعه بار در تاریخ است که در آن کل محموله ازدست‌رفته به ارزش بیش از ۱۰۰ میلیون دلار، که حتی بیشتر از ارزش کل کشتی (۵۰ میلیون دلار) است [4]. این حادثه سرآغاز برای دوره‌ای است که در آن پارامتریک رولینگ را به‌عنوان یکی از مباحث مهم در طراحی کشتی‌ها تبدیل کرد و پس از این حادثه تحقیقات گسترده‌ای بر روی این پدیده انجام شده است. پس از این کشتی، موارد متعدد دیگری در خصوص پدیده پارامتریک رولینگ در کشتی‌های کانترینر گزارش شده است. از جمله این موارد می‌توان کشتی‌های Maersk Carolina در سال ۲۰۰۳، Nedlloyd Genoa در سال ۲۰۰۶، Svendborg Maersk در سال ۲۰۱۴ و MSC Zoe در سال ۲۰۱۹ را نام برد. دو مورد از جدیدترین گزارش‌های موجود در مورد کشتی‌های کانترینر مربوط به کشتی‌های APL England و One Apus در سال ۲۰۲۰ است. در شکل ۱ تصاویر

پارامترهای آن معرفی شده است. در بررسی پدیده پارامتریک رولینگ از تئوری موج مؤثر استفاده خواهد شد. جزئیات این تئوری در این بخش ذکر خواهد شد. در بخش سوم ابتدا ضرایب معادله حرکت رول یک کشتی کانتینر بر نمونه از مراجع مرتبط استخراج شده و سپس روش حل معادله بیان شده است. در بخش چهارم زاویه حرکت رول برای کشتی نمونه با انجام تحلیل‌های عددی متعدد به دست آمده و با نتیجه ارائه شده در مقاله موردنظر مقایسه شده است. در بخش پنجم نیز با تغییر شرایط محیطی کشتی نمونه توزیع احتمالی زاویه حرکت رول کشتی محاسبه و بررسی شده است.

۲- روش بررسی پارامتریک رولینگ در امواج نامنظم

دریاها به طور طبیعی دارای امواج نامنظم هستند. از امواج نامنظم به عنوان امواج تصادفی نیز یاد می‌شود. امواج در دریا به ندرت به صورت یک جهته و منظم منتشر شوند، بلکه معمولاً به صورت ترکیبی از امواج با دامنه، طول و جهت متفاوت قابل رویت هستند. امواج نامنظم را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از امواج سینوسی با دامنه، طول و دوره تناوب متفاوت تجزیه کرد؛ بنابراین، رویکرد طیفی با مجموع امواج جزئی روشی معتبر برای نمایش یک موج تصادفی است. براین اساس، برای بیان حالت‌های مختلف دریا بیان نوع طیف موج و پارامترهای آن لازم است. توابع مختلف و معروفی برای طیف امواج نامنظم تاکنون ارائه شده که از جمله معروف‌ترین آن‌ها می‌توان طیف موج پیرسون - موسکویچ و جانسوپ را نام برد. معادله حرکت کشتی در امواج منظم و نامنظم مشابه با یکدیگر است. براین اساس می‌توان از معادله زیر برای محاسبه زاویه حرکت رول به صورت یک درجه آزادی و مستقل استفاده کرد.

$$(I_{xx} + A_{xx}) \ddot{\phi} + B_{xx}(\phi, \dot{\phi}) + C_{xx}(\phi, t) = M_{roll} \quad (1)$$

در رابطه فوق I_{xx} و A_{xx} بترتیب ممان اینرسی جرمی و ممان اینرسی افزوده حرکت رول کشتی، B_{xx} نیروی میرایی حرکت رول و C_{xx} نیروی بازگرداننده حرکت رول است. M_{roll} در سمت راست رابطه نیز ممان تحریک حرکت رول است که در پدیده پارامتریک رولینگ در حالت امواج از سینه و پاشنه برابر با صفر خواهد بود. ϕ و مشتقات آن نیز نشان‌دهنده زاویه رول و سرعت و شتاب رول هستند. شکل‌های مختلفی از نیروی میرایی در حرکت رول متناسب با هندسه کشتی ارائه شده است. در این تحقیق از فرم $B(\dot{\phi}) = B_1\dot{\phi} + B_3\dot{\phi}^3$ استفاده خواهد شد. رابطه نیروی بازگرداننده یکی از مهمترین نکات در بررسی پارامتریک رولینگ کشتی است. رابطه نیروی بازگرداننده کشتی را میتوان به صورت رابطه $\rho g \nabla GZ(t, \phi)$ بیان کرد. در این رابطه $GZ(t, \phi)$ بازو بازگرداننده کشتی در زمان t و زاویه رول ϕ است. همانطور که

اساس ویرایش سالهای ۲۰۱۰ و ۲۰۱۶ بررسی کردند. این دستورالعمل در سالهای اخیر نیز اصلاح شده و آخرین ویرایش آن در سال ۲۰۲۰ ارائه شده است. بخشی از این دستورالعمل شامل پدیده پارامتریک رولینگ است. تحقیقات پیشین انجام شده در زمینه پارامتریک رولینگ را می‌توان از دیدگاه‌های مختلف تقسیم بندی کرد. بررسی آماری نتایج یکی از مهم‌ترین مراحل در بررسی پارامتریک رولینگ کشتی در امواج نامنظم است. امواج نامنظم در واقع به صورت متغیرهایی تصادفی بر روی کشتی تأثیر دارند. به دلیل ماهیت تصادفی بودن امواج نامنظم برای بیان مشخصات آن‌ها از طیف‌های موج استفاده می‌شود. طیف موج در واقع ویژگی‌های یک موج را از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل می‌کند. با توجه به ویژگی تصادفی بودن امواج نامنظم، بالطبع باید از روش‌های آماری برای بیان حرکات کشتی نظیر حرکت رول بهره برد. در بخش قابل توجهی از تحقیقات انجام شده در خصوص پدیده پارامتریک رولینگ کشتی‌ها نتایج را به صورت متغیرهایی آماری بیان نموده‌اند. یکی از مهم‌ترین تحقیقات انجام شده در این زمینه مقاله دوستال و کروزر [11] است. در این مقاله ابتدا سعی شده تا تأثیر امواج بر نیروی بازگرداننده کشتی به صورت روابط ریاضی مدلسازی شود. سپس با ارائه روابط جدید طیف امواج را به طیف‌های کاربردی برای تحلیل حرکت رول کشتی تبدیل کرده است. در نهایت نیز با حل معادله دیفرانسیل حرکت رول کشتی، احتمال وقوع زوایای رول در امواج نامنظم را برای یک کشتی بررسی کرده است. اهمیت این تحقیق از آنجایی است که روش جدیدی را برای بررسی حرکت رول در امواج نامنظم بنا نهاده است. بعدها از روند ارائه شده در این مقاله در پژوهش‌های متعددی استفاده شده است. یکی از کاملترین تحقیقات در این زمینه و با روش ذکر شده توسط چای و همکارانش [1] انجام شده است. در این پژوهش احتمال وقوع زوایای غلتش رول مختلف در یک کشتی حمل خودرو در امواج نامنظم بررسی شده است. همچنین در این تحقیق سعی شده است تا چارچوبی برای دستیابی به احتمال وقوع زوایای رول کشتی با احتمال وقوع طولانی مدت ارائه شود. هدف از این مقاله به دست آوردن حداکثر زاویه رول کشتی در طول مدت زمان طولانی عمر کشتی است. ینسن و چوی [13]، [12] در دو تحقیق با استفاده از روش قابلیت اطمینان احتمال وقوع زوایای رول کشتی در پدیده پارامتریک رولینگ را بررسی نموده‌اند. در مرجع [13] حرکت رول کشتی به صورت یک درجه آزادی در نظر گرفته شده، ولی در مرجع [12] از روش ۶ درجه آزادی بهره برده شده است.

هدف اصلی مقاله حاضر بررسی پارامتریک رولینگ کشتی در امواج نامنظم و دستیابی به توزیع احتمال زاویه رول یک کشتی نمونه در امواج نامنظم طولی است. برای دستیابی به این هدف در بخش دوم معادله یک درجه آزادی حرکت رول کشتی بیان شده و

در روابط فوق $r = \frac{L}{2} \kappa(\omega)$ است. اگر در رابطه ۳ مقدار $\psi = 0$ یا به طور معادل $\eta_s = 0$ قرار داده شود، رابطه اصلی ارائه شده توسط گریم در سال ۱۹۶۱ به دست خواهد آمد. در بیشتر فرم بدنه های موجود برای کشتی ها بیشترین تغییرات ارتفاع متاسنتریک در حالتی که طول موج برابر با طول کشتی است روی می دهد، به همین دلیل در رابطه ۳ طول موج L برابر با طول کشتی قرار داده می شود. رابطه فرکانس برخورد یک کشتی به صورت رابطه $\omega_e = \omega - kU \cos(\beta)$ قابل تعریف است. در این رابطه U سرعت کشتی، β زاویه برخورد کشتی و موج و k عدد موج است. با لحاظ زاویه برخورد برای کشتی، طیف موج دریا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$S(\omega_e) = S(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\omega_e} \right| \quad (۷)$$

در رابطه فوق $d\omega/d\omega_e$ به نام ژاکوبین تبدیل طیف موج شناخته می شود. در این حالت بجای استفاده از طیف موج $S(\omega)$ باید از طیف موج برخورد $S(\omega_e)$ برای تولید تابع موج استفاده کرد. با استفاده از رابطه فرکانس برخورد، ژاکوبین تبدیل طیف موج در آب عمیق را می توان به صورت رابطه زیر به دست آورد:

$$\left| \frac{d\omega}{d\omega_e} \right| = \left| \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g - 4U\omega_e \cos \chi}} \right| \quad (۸)$$

با در نظر گرفتن شرایط فوق موج منظم معادل با موج نامنظم دریا تولید شده که تابعی از موقعیت قرارگیری در کنار کشتی (تابعی از X) و همچنین تابع زمان است. در مرحله بعد باید ساده سازی نیروی بازگرداننده $\rho g \nabla GZ$ یا به عبارتی بازوی بازگرداننده GZ بر اساس موج تعریف انجام شود. تحقیقات مختلفی در خصوص این ساده سازی انجام شده است. یکی از معروفترین روابط ارائه شده برای ساده سازی بازوی بازگرداننده توسط دوستان و کروزر در مرجع [11] ارائه شده است. فرم کلی رابطه ارائه شده به صورت زیر می باشد.

$$GZ_{app}(\phi, \eta, \psi) = \sum_{i=0}^{N_\phi} \left\{ \sum_{k=0}^{N_k} Q_{i,0,2,k} \eta^{2k} + \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_s} Q_{i,j,2k+1}^S \eta^{2k+1} \sin(j\psi) + \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{m=1}^{N_c} Q_{i,m,2k+1}^C \eta^{2k+1} \cos[m(\psi + Q^{C*})] \right\} \phi^{2i+1} \quad (۹)$$

در رابطه فوق \emptyset نشان دهنده زاویه رول کشتی است. با تعریف پارامترهای خاص برای متغیرهای تعریف شده در رابطه فوق، می توان شکل کلی آن را ساده سازی کرد. طبق توصیه دوستان در مرجع [15] اگر مقادیر زیر در رابطه ۹ قرار داده شود، این رابطه به صورت زیر ساده سازی خواهد شد.

$$\begin{aligned} N_\phi &= 2, N_k = 0, N_s = 1 \\ N_c &= 1, Q_{0,1,1}^S = 0, Q_{1,1,1}^S = 0 \\ Q_{2,1,1}^S &= 0, Q_{1,1,1}^C = 0, Q_{2,1,1}^C = 0, Q^{C*} = 0 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

گفته شد، امواج نامنظم را می توان به صورت مجموعه ای از امواج منظم سینوسی مدلسازی نمود. برای تعریف دقیق یک موج نامنظم نیاز است تا تعداد امواج منظم تشکیل دهنده آن زیاد باشد. در این شرایط اگر بخواهیم بر اساس روندی مشابه با امواج منظم، تأثیر هر موج منظم را بررسی نمائیم، تعداد حالت های قابل بررسی بسیار زیاد بوده و در نتیجه مسئله بسیار پیچیده خواهد شد. برای غلبه بر این مشکل به صورت کلی دو روش برای مدلسازی بازگرداننده در امواج نامنظم توصیف شده است. روش موج مؤثر گریم یکی از روش های معروف در این زمینه است که در ادامه توصیف می شود. در تحقیقات متعددی برای ساده سازی مساله و در نتیجه ارائه یک رابطه مناسب برای GZ ، از تئوری موج گریم استفاده شده است. این تئوری ابتدا توسط گریم در سال ۱۹۶۱ ارائه شده و در سال ۲۰۰۸ توسط بولیان [14] توسعه داده شده است. مطابق با تئوری موج گریم، یک موج تصادفی و نامنظم را می توان با استفاده از تعریف زیر به صورت یک موج منظم با رویه $Z(x, T)$ در نظر گرفت [14]:

$$\begin{aligned} Z_{eff}(x, t) &= \eta_c(t) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ &+ \eta_s(t) \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ &= \eta(t) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ &+ \psi(t) \end{aligned} \quad (۲)$$

در رابطه اخیر L نشان دهنده طول مؤثر موج است که در بررسی حرکات کشتی برابر با طول کشتی در نظر گرفته می شود. در این رابطه داریم:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sqrt{\eta_s(t)^2 + \eta_c(t)^2}, \\ \psi(t) &= \arctan\left(\frac{\eta_s(t)}{\eta_c(t)}\right), \end{aligned} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} \eta_s(t) &= -\eta(t) \sin(\psi(t)), \\ \eta_c(t) &= \eta(t) \cos(\psi(t)) \end{aligned} \quad (۴)$$

پارامترهای $\eta_s(t)$ و $\eta_c(t)$ در رابطه اخیر با کمینه کردن اختلاف بین تابع موج نامنظم و موج مؤثر $Z_{eff}(x, t)$ به دست می آیند. اگر طیف موج دریا را به صورت رابطه $S(\omega)$ در نظر بگیریم، طیف توابع $\eta_s(t)$ و $\eta_c(t)$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} S_{\eta_s}(\omega) &= 2S(\omega) f_s(\kappa(\omega))^2, \\ S_{\eta_c}(\omega) &= 2S(\omega) f_c(\kappa(\omega))^2 \end{aligned} \quad (۵)$$

در روابط فوق f_s و f_c توابع انتقال هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} f_s(\kappa(\omega)) &= \frac{2\pi \sin r}{\pi^2 - r^2}, \\ f_c(\kappa(\omega)) &= \frac{2r \sin r}{\pi^2 - r^2} \end{aligned} \quad (۶)$$

در رابطه فوق H_s ارتفاع مشخصه موج، ω_p فرکانس پیک موج و T_p دوره تناوب پیک موج هستند. در این تحقیق دوره تناوب پیک موج و ارتفاع مشخصه موج بترتیب ۹/۹۹ ثانیه و ۱۰/۴۳ متر در نظر گرفته شده است. همچنین فرض شده است که موج با زاویه برخورد ۱۸۰ درجه با کشتی ثابت برخورد می‌کند.

باتوجه به مطالب ذکر شده، معادله حرکت رول کشتی را با تغییر ضرایب می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{\phi} + b_1\dot{\phi} + b_3\phi^3 + \overline{q_1}\phi + \overline{q_2}\phi^3 + \overline{q_3}\phi^5 + \overline{q_4}\eta_c\phi = 0 \quad (15)$$

پارامترها و ضرایب حرکت رول کشتی از [16] به صورت جدول ۱ قابل استخراج است. برای حل این معادله می‌توان از تغییر متغیر $y_1 = \phi$ و $y_2 = \dot{\phi}$ استفاده کرد. براین اساس معادله اخیر به صورت دو معادله مرتبه اول زیر در خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -b_1y_2 - b_3y_2^3 - \overline{q_1}y_1 - \overline{q_2}y_1^3 - \overline{q_3}y_1^5 - \overline{q_4}\eta_c y_1 \end{aligned} \quad (16)$$

نکته بسیار حائز اهمیت در حل معادلات اخیر تصادفی بودن متغیر η_c است. متغیر η_c به دلیل ماهیت مساله به صورت طیف موج مؤثر قابل بیان است. در این حالت مقدار η_c به صورت تابع زمان جهت جایگذاری در روابط اخیر قابل استفاده نیست. برای حل این مساله باید از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده کرد.

جدول ۱: پارامترهای حرکت رول کشتی C11 در امواج نامنظم [16]

واحد	مقدار	پارامتر
kg	6.92×10^7	جابجایی
Nms	1.66×10^8	ضریب میرایی خطی B_1
Nms ³	1.04×10^{11}	ضریب میرایی مرتبه سه B_3
m	1.952	ارتفاع متاسنتریک اولیه
s ⁻²	0.0438	$\overline{q_2}$
s ⁻⁴	-0.0704	$\overline{q_3}$
m ⁻¹ s ⁻²	0.0213	$\overline{q_4}$
s ⁻¹	0.0084	b_1
s	5.299	b_3

برای تبدیل طیف موج مؤثر و در نهایت دستیابی به پاسخ معادلات اخیر روش‌های عددی مختلفی پیشنهاد شده است. یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها توسط دوستان و کروزر [11] در سال ۲۰۱۱ ارائه شده است. پیش‌تر بیان شد که امواج دریا ماهیتی تصادفی دارند و به همین دلیل برای بیان رفتار امواج از تحلیل طیفی استفاده می‌شود. دوستان و کروزر در مرجع [11] از یک فرم معادله دیفرانسیل تصادفی خطی با نام ایتو برای تحلیل موج و دستیابی به η_c استفاده کرده اند. در این روش با حل معادلات فضای حالت به شکل روابط زیر می‌توان η_c را به دست آورد.

$$\begin{aligned} GZ_{app}(\phi, \eta, \psi) &= Q_{0,0,0}\phi + Q_{1,0,0}\phi^3 \\ &+ Q_{2,0,0}\phi^5 \\ &+ Q_{0,1,1}^c \eta \cos(\psi) \phi \end{aligned} \quad (11)$$

در این شرایط با لحاظ عبارت $\eta_c = \eta \cos \psi$ در رابطه ۴ و ساده نویسی ضرایب، رابطه بازوی بازگرداننده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$GZ_{app}(\phi, \eta, \psi) = q_1\phi + q_2\phi^3 + q_3\phi^5 + q_4\eta_c\phi \quad (12)$$

در رابطه فوق مقادیر q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ضرایب ساده سازی شده هستند. این ضرایب از طریق کمینه کردن مجموع مربعات اختلاف $GZ(\phi, \eta, \psi)$ و $GZ_{app}(\phi, \eta, \psi)$ قابل محاسبه است. در این حالت باید چند موج منظم با ارتفاع‌ها و موقعیت‌های مختلف در کنار کشتی قرارداد و با تحلیل پایداری کشتی مقدار بازوی بازگرداننده $GZ(\phi, \eta, \psi)$ را محاسبه کرد، پس از این مرحله می‌توان با کمینه سازی ذکر شده ضرایب q_i را به دست آورد.

۳- ارزیابی پارامتریک رولینگ در یک کشتی نمونه

در این بخش نیز مشابه با فصل چهارم کشتی APL China با کلاس فرم بدنه C11 به عنوان کشتی نمونه برای بررسی پدیده پارامتریک رولینگ در امواج نامنظم در نظر گرفته شده است. باتوجه به مطالب ارائه شده در بخش قبل، رابطه ارتعاشی حرکت رول کشتی در امواج نامنظم در حالتی که موج از سینه یا پاشنه به کشتی برخورد می‌کند، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} (I_{xx} + A_{xx})\ddot{\phi} + B_1\dot{\phi} + B_3\phi^3 + q_1\phi \\ + q_2\phi^3 + q_3\phi^5 + q_4\eta_c\phi \\ = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

در سال‌های اخیر با رونق گرفتن بحث تدوین معیارهای نسل دوم پایداری کشتی‌ها، تحقیق در خصوص معیارهای پایداری نظیر پارامتریک رولینگ گسترش قابل توجهی داشته است. در سال ۲۰۲۱ ژو و همکارانش [16] پدیده پارامتریک رولینگ برای کشتی C11 بر اساس روش عددی متوسط گیری تصادفی بررسی نموده اند. در این بخش ضرایب معادله ارتعاشی فوق از این تحقیق استخراج شده است. روند دستیابی به ضرایب q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) در بخش قبل توصیف شد. در مرجع [16] مقادیر GZ برای کشتی C11 محاسبه شده و با انجام برازش لازم، ضرایب فوق محاسبه شده است.

ژو و همکارانش در [16] طیف موج دریا را به صورت پیرسون-موسکویچ در نظر گرفته اند. رابط این طیف موج به صورت زیر است.

$$S_{\zeta\zeta}(\omega) = \frac{5.058g^2H_s^2}{T_p^4\omega^5} \exp\left(-1.25\frac{\omega_p^4}{\omega^4}\right) \quad (14)$$

$$u_1 = \eta_c \quad (17)$$

$$du_1 = (u_2 - a_1 u_1)dt + b_1 dW \quad (18)$$

$$du_2 = -a_1 u_1 dt \quad (19)$$

در فرم فضای حالت از معادلات دیفرانسیل تصادفی نظیر روش ایتو، عبارت dt برای نشان دادن تغییرات در حوزه زمان و عبارت dW برای اعمال تغییر از حوزه فرکانس به زمان استفاده می‌شود. عبارت dW را به عنوان متغیر وینر می‌شناسند. برای استفاده از روابط اخیر لازم است تا طیف حاکم که تبدیل از حوزه فرکانس به زمان از روی آن انجام می‌شود، که در اینجا طیف موج مؤثر η_c است، فرم کلی مشخصی به صورت رابطه زیر داشته باشد. این شکل طیف موج را به عنوان طیف موج فیلتر شده می‌شناسند.

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b_1^2 w^2}{a_1^2 w^2 + (a_2 - w^2)^2} \quad (20)$$

در این مقاله برای حل مجموعه معادلات دیفرانسیلی ذکر شده در روابط ۱۷ تا ۱۹ از کتابخانه sdeint [17] که در زبان برنامه‌نویسی پایتون نوشته شده، استفاده شده است. این کتابخانه برای حل معادلات دیفرانسیلی تصادفی نوشته شده است. در این کتابخانه اگر ضریب متغیر وینر برابر با صفر قرار داده شود، معادله دیفرانسیل را از حالت تصادفی به حالت معمولی تبدیل کرده و با یکی از روش‌های انتخابی حل معادلات دیفرانسیل معمولی نظیر رانگا - کوتا حل خواهد کرد.

۴- صحت سنجی روش عددی مورد استفاده

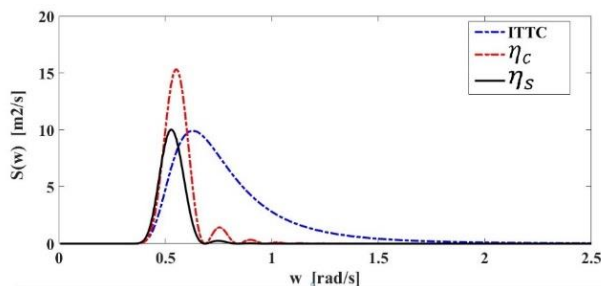
در مرجع [16]، کشتی C11 که توسط لو و همکارانش در مرجع [18] بصورت آزمایشگاهی مدل‌سازی و تحلیل شده به عنوان کشتی نمونه جهت ارزیابی روش عددی انتخاب شده بود. در این تحقیق نیز ابتدا نتایج عددی بدست آمده طبق روند توضیح داده شده با نتایج ارائه شده در دو مرجع فوق مقایسه شده است. بر اساس توضیحات ارائه شده در بخش قبل، برای دستیابی به پاسخ حرکت رول کشتی نمونه به صورت تابع زمانی، باید روندی مطابق با فلوجارت ارائه شده در شکل ۲ انجام شود. اطلاعات کشتی، ضرایب میرایی و GZ کشتی نمونه بر اساس [16] در جدول ۱ آورده شده است.



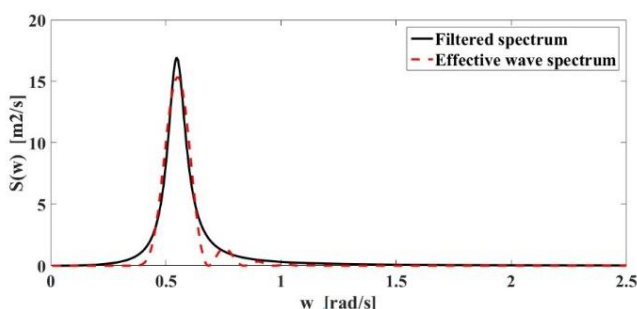
شکل ۲- روند محاسبه پاسخ دینامیکی حرکت رول کشتی در امواج نامنظم

بر اساس شکل ۲، برای تأثیر شرایط دریا باید مراحل زیر انجام شود:

- محاسبه طیف موج مؤثر: با استفاده از روابط ارائه شده در بخش قبل طیف موج مؤثر به دست آمده از طیف موج دریا قابل محاسبه است. در شکل ۳ طیف موج دریا و طیف موج مؤثر محاسبه شده نشان داده شده است.
- محاسبه طیف موج فیلتر شده: برای محاسبه طیف موج فیلتر شده از کتابخانه الگوریتم ژنتیک ارائه شده در که با در زبان برنامه‌نویسی پایتون نوشته شده، استفاده شده است. طیف موج فیلتر شده به دست آمده به صورت شکل ۴ به دست آمده است.
- حل معادلات SDE: همان طور که پیش تر گفته شد برای محاسبه پاسخ دینامیکی حرکت رول کشتی، روابط ۱۷ تا ۱۹ با استفاده از کتابخانه sdeint استفاده شده است. یک نمونه از پاسخ‌های به دست آمده برای ارتفاع موج دریا به صورت تابع زمان و همچنین حرکت رول کشتی به صورت تابع زمان در شکل ۵ نشان داده شده است. برای دستیابی به پاسخ زمانی معادلات حرکت رول در مدت زمان ۱۱۸۰۰ ثانیه حل شده که ۵۰۰ ثانیه اول آن برای جلوگیری از تأثیر مقادیر اولیه معادله دیفرانسیل حذف شده است.

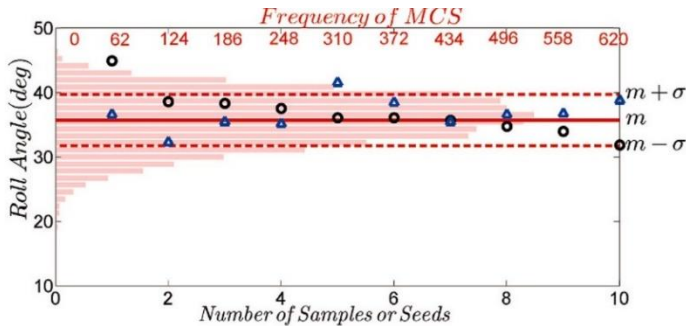


شکل ۳: طیف موج دریا و طیف موج مؤثر تولید شده در حالت ارتفاع موج برابر با ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه

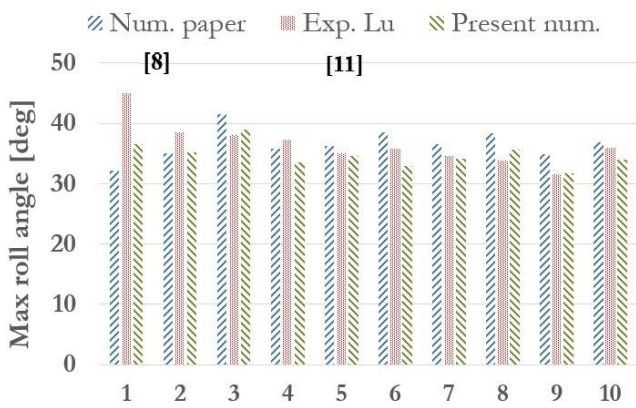


شکل ۴: طیف موج مؤثر و طیف موج فیلتر شده حالت ارتفاع موج برابر با ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه

حرکت رول ۱۰۰۰ بار حل شده و منحنی هیستوگرام حاصل از آن در شکل ۸-الف نشان داده شده است. در شکل ۸-ب نیز بهترین توزیع احتمال برازش شده بر روی داده ها که توزیع GEV است، نشان داده شده است.

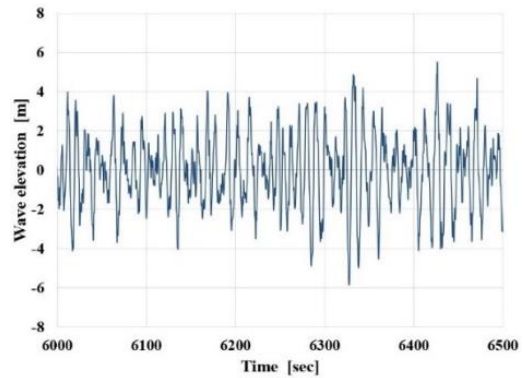


شکل ۶- نتایج ماکزیمم زاویه رول حرکت کشتی در [16]

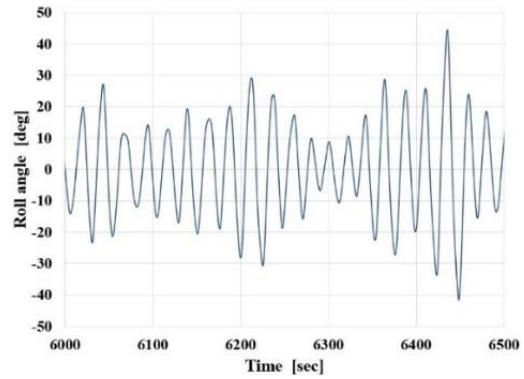


شکل ۷- مقایسه نتایج ماکزیمم زاویه رول حرکت کشتی

مقدار متوسط حداکثر زاویه رول آزمایش شده در مرجع [18] برای شرایط تعریف شده ۳۶/۷ درجه گزارش شده است. این مقدار در تحلیل‌های عددی مرجع [16] برابر با ۳۵/۷ درجه است. بر اساس تحلیل‌های عددی انجام شده در مطالعه حاضر مقدار متوسط حداکثر زاویه برابر با ۳۳/۳ درجه بدست آمده که به ترتیب ۹/۲ درصد و ۶/۷ درصد از نتایج آزمایشگاهی مرجع [18] و عددی مرجع [16] کمتر است. علت این اختلاف می‌تواند بدلیل تقریب موج فیلتر شده مطابق با شکل ۴ باشد. هر چه طیف موج فیلتر شده با دقت بیشتری امکان تقریب طیف موج موثر را داشته باشد، دقت نتایج بالاتر رفته و اختلاف نتایج عددی نیز کمتر خواهد شد.



(الف)



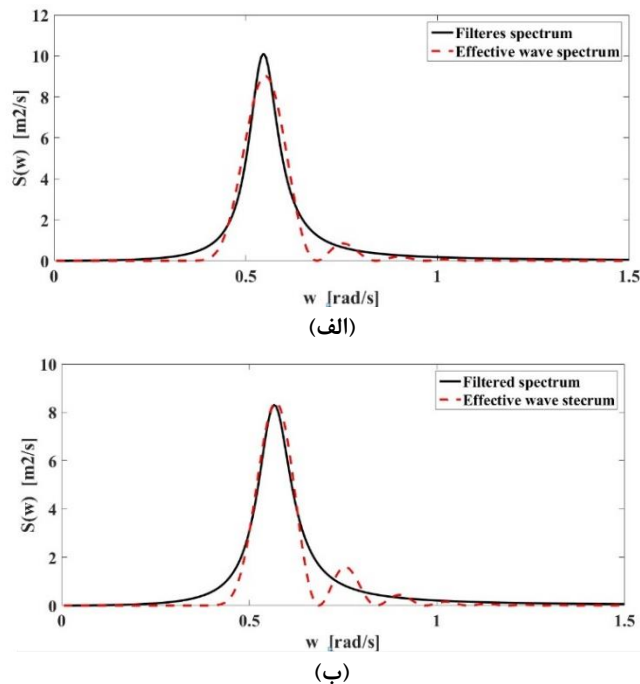
(ب)

شکل ۵: تحلیل زمانی حرکت رول، الف - ارتفاع موج نمونه به صورت تابع زمان، ب - پاسخ حرکت رول به صورت تابع زمان

به دلیل ماهیت تصادفی امواج دریا، معیارهای مختلفی برای بررسی حرکت رول کشتی در امواج نامنظم بیان شده است. یکی از معیارهای مهم ارائه شده محاسبه حداکثر زاویه حرکت رول کشتی در امواج است. لو و همکارانش در مرجع [18] برای دستیابی به این زاویه حداکثر ۱۰ آزمایش را در امواج نامنظم برای کشتی C11 انجام دادند. در مرجع [16] نیز بصورت عددی ۱۰ بار و هر بار به مدت ۶۰۰۰ ثانیه معادله ۱۵ حل شده است. نتایج دو دسته تحلیل آزمایشگاهی و عددی بترتیب بصورت دایره و مثلث در شکل ۶ نشان داده شده است. در اینجا نیز ابتدا برای مقایسه نتایج عددی ۱۰ بار معادله ۱۵ حل شده است. نتیجه مقایسه ای پاسخ های حداکثر زاویه رول کشتی بصورت شکل ۷ است. همانطور که در این شکل دیده می شود نتایج عددی حاصل در این تحقیق برای ۱۰ حل اول نزدیک به نتایج ارائه شده در مراجع [18] و [16] است.

به دلیل ماهیت تصادفی امواج دریا نیاز است تا تعداد تحلیل‌های عددی انجام شده زیاد باشد تا تقریب جامع‌تری از حداکثر زاویه رول کشتی در شرایط تعریف شده به دست آید. به این منظور در مرجع [16] معادله حرکت رول ۱۰۰۰۰ بار حل شده و مقدار حداکثر زاویه رول در هر تحلیل استخراج شده است. در نهایت منحنی هیستوگرام این تحلیلها به نام نتایج تحلیل‌های مونت کارلو با عبارت MCS نشان داده شده است. در تحقیق حاضر نیز معادله

ثانیه به ۸ ثانیه سبب کاهش مقدار متوسط حداکثر رول از ۳۳/۳ درجه به ۲۴/۲ درجه شده است.

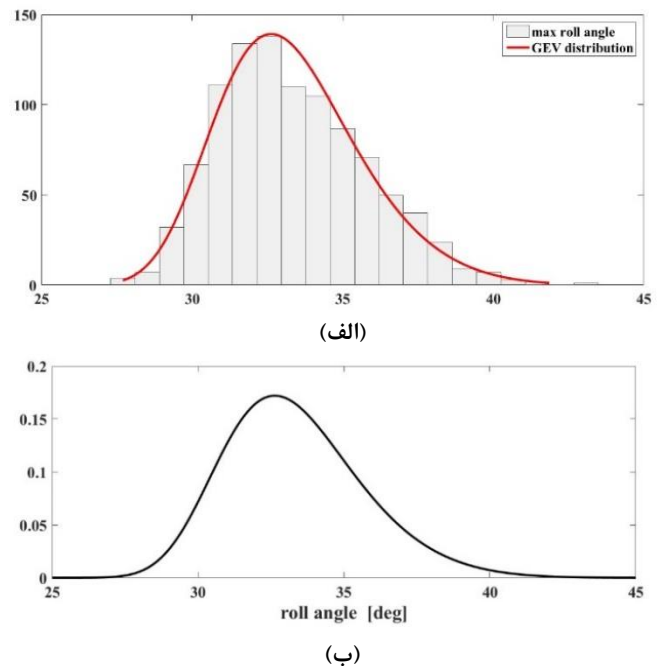


شکل ۹- طیف موج مؤثر و طیف موج فیلتر شده، الف- ارتفاع موج برابر با ۸ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه، ب - ارتفاع موج برابر با ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۸ ثانیه

توزیع‌های احتمال سه حالت ذکر شده برای مقایسه در شکل ۱۱ آورده شده است. از روی این توزیع‌های احتمال می‌توان محدوده وقوع مقادیر حداکثر حرکت رول کشتی را مقایسه کرد. در حالت اول ۸۰ درصد مقادیر حداکثر رول کشتی در محدوده ۳۰ تا ۳۸ درجه خواهد بود، درحالی‌که برای حالت دوم این محدوده از حدوداً ۲۴ تا ۳۰ درجه و در حالت سوم از ۲۲ تا ۲۸ درجه است. با مقایسه این محدوده‌ها و همچنین مقایسه توزیع‌های احتمال ذکر شده می‌توان تقریب بهتری از حداکثر زاویه حرکت رول کشتی در هر حالت دریا به دست آورد.

۶- نتیجه‌گیری

پدیده‌ای که در کشتی‌ها به‌عنوان پارامتریک رولینگ یا رول پارامتریک شناخته می‌شود، می‌تواند سبب ایجاد زوایای رول بزرگ در کشتی تا حدود ۴۰ درجه یا بیشتر شده و در موارد شدید حتی ممکن است منجر به غرق شدن کشتی شود. بررسی موارد وقوع پارامتریک رولینگ نشان می‌دهد که این پدیده از اهمیت قابل‌توجهی برای کشتی‌ها برخوردار است و در زمان طراحی و حتی ناوبری کشتی باید تمهیداتی برای کاهش تأثیرات مخرب آن در نظر گرفته شود.



شکل ۸- نتایج عددی مقادیر حداکثر زاویه رول، الف - تابع هیستوگرام، ب - تابع توزیع احتمال

۵- مقایسه حداکثر زاویه رول در شرایط متفاوت دریا

برای بررسی تأثیر شرایط متغیر دریا بر روی توزیع احتمال زوایای حداکثر رول کشتی C11 دو حالت اضافه بر حالت قبل به‌صورت زیر بررسی شده است:

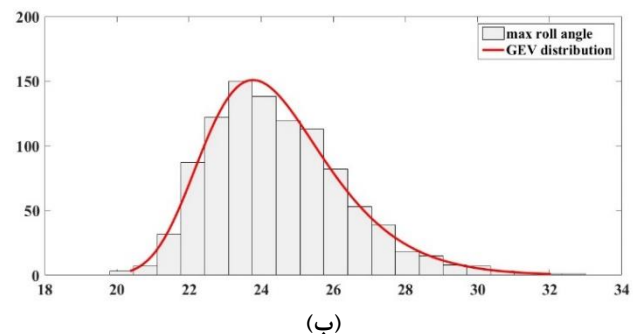
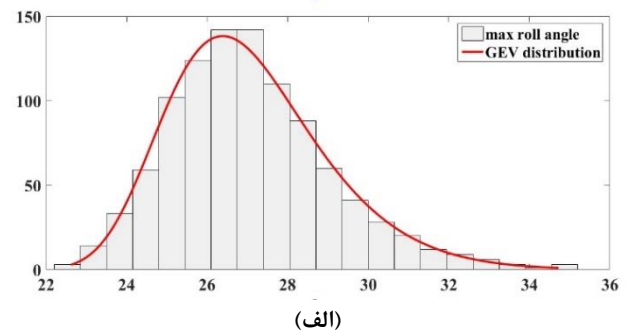
- حالت ۱: موج نامنظم با ارتفاع مشخصه ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه - پیش‌فرض
- حالت ۲: موج نامنظم با ارتفاع مشخصه ۸ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه
- حالت ۳: موج نامنظم با ارتفاع مشخصه ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۸ ثانیه

طیف موج فیلتر شده در حالت‌های دوم و سوم در شکل ۹ نشان‌داده شده است. از روی شکل ۹- ب مشخص است که با کم‌شدن دوره تناوب پیک موج تغییرات طیف موج مؤثر در فرکانس‌های موج بزرگ‌تر از ۰/۷ رادیان بر ثانیه سبب می‌شود تا طیف فیلتر شده خطای بیشتری برای تقریب موج داشته باشد. در این حالت احتمالاً خطای ایجاد شده توسط روشی که توسط دوستال و کروزر ارائه شده بیشتر خواهد شد و در نتیجه باید از روش‌های دیگری برای حل معادله حرکت رول استفاده کرد. منحنی‌های هیستوگرام مقادیر حداکثر حرکت رول کشتی C11 برای حالت‌های دوم و سوم در شکل ۱۰ نشان‌داده شده است. مقدار متوسط این دو نمودار در حالت‌های دوم و سوم به ترتیب ۲۶/۴ و ۲۴/۲ درجه است. کم‌شدن ارتفاع موج از ۱۰/۴۳ متر به ۸ متر سبب کاهش مقدار متوسط حداکثر رول از ۳۳/۳ درجه به ۲۶/۴ درجه شده است. همچنین کم‌کردن دوره تناوب پیک موج از ۹/۹۹

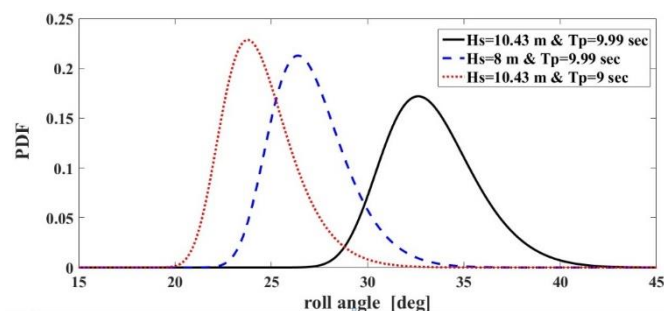
زاویه رول در چند حالت موج نامنظم برای کشتی کانتینربر C11 به عنوان کشتی نمونه بررسی شده است. با استفاده از نتایج آماری می توان تقریب بهتری از خروجی حرکات کشتی در امواج واقعی دریا داشت. سه حالت امواج دریا شامل، حالت با موج نامنظم با ارتفاع مشخصه ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه، حالت ۲ موج نامنظم با ارتفاع مشخصه ۸ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه و حالت ۳ شامل موج نامنظم با ارتفاع مشخصه ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۸ ثانیه بررسی شده است. مقدار متوسط حداکثر زاویه رول این کشتی به ترتیب در سه حالت فوق به اندازه ۳۳/۳، ۲۶/۴ و ۲۴/۲ درجه به دست آمده است. با استفاده از این نتایج می توان طراحی های لازم برای سیستم های نصب شده بر روی کشتی را انجام داد.

۷- مراجع

- [1] W. Chai, A. Naess, B. J. Leira, and G. Bulian, "Efficient Monte Carlo simulation and Grim effective wave model for predicting the extreme response of a vessel rolling in random head seas," *Ocean Engineering*, vol. 123, pp. 191–203, Sep. 2016, doi: 10.1016/j.oceaneng.2016.07.025.
- [2] American Bureau of Shipping, "Guide for the: Assessment of parametric roll resonance in the design of container carriers." Apr. 2019.
- [3] W. Chai, A. Naess, and B. J. Leira, "Filter models for prediction of stochastic ship roll response," *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 41, pp. 104–114, Jul. 2015, doi: 10.1016/j.probengmech.2015.06.002.
- [4] I. Ghamari, M. Greco, O. M. Faltinsen, and C. Lugni, "Numerical and experimental study on the parametric roll resonance for a fishing vessel with and without forward speed," *Applied Ocean Research*, vol. 101, p. 102272, Aug. 2020, doi: 10.1016/j.apor.2020.102272.
- [5] H. Davis, *Parametric Rolling Motion – a twist in the tail!*, Feb. 18, 2022. <https://www.stratumfive.com/industry/parametric-rolling-motion-prm-contributes-to-the-loss-of-around-1000-containers-a-year/>
- [6] Sa. Chambers, *Battered ONE Apus moors at Kobe*, Feb. 18, 2022. <https://splash247.com/battered-one-apus-moors-at-kobe/>



شکل ۱۰- منحنی هیستوگرام مقادیر حداکثر زاویه رول کشتی C11،
الف- ارتفاع موج برابر با ۸ متر و دوره تناوب پیک ۹/۹۹ ثانیه، ب -
ارتفاع موج برابر با ۱۰/۴۳ متر و دوره تناوب پیک ۸ ثانیه



شکل ۱۱- مقایسه توزیع های احتمال برای حالت های مختلف دریا

از این رو در دو دهه اخیر این پدیده مورد توجه محققین و حتی سازمان بین المللی دریانوردی قرار گرفته و سعی شده است تا تحقیقات مختلفی بر روی آن از دیدگاه مختلف انجام شود. تغییر سطح آب در شرایط موج به عنوان پارامتر محرک در پدیده پارامتریک رولینگ بوده و به مانند نیروی تحریک بر کشتی اثر می کند. در این مقاله پدیده پارامتریک رولینگ در امواج نامنظم بررسی شده است. یکی از ضعف های روند بررسی پارامتریک رولینگ در امواج منظم، خطی فرض کردن بازوی بازگرداننده و در نتیجه ممان بازگرداننده کشتی است. این حالت در زوایای محدود و کوچک به طور واقعی برقرار است، اما در زوایای بزرگ با تغییر زیاد سطح صفحه آبخور کشتی صادق نخواهد بود. این ضعف در بررسی امواج نامنظم و لحاظ بازوی بازگرداننده به صورت رابطه چندجمله ای مرتفع خواهد شد، به گونه ای که امکان وقوع زوایای رول بزرگ و غیرقابل قبول در پاسخ معادله دیفرانسیلی حرکت رول وجود نخواهد داشت در این مطالعه تابع توزیع احتمال حداکثر

added resistance taken into account,” *J Mar Sci Technol*, vol. 16, no. 4, pp. 462–471, Dec. 2011, doi: 10.1007/s00773-011-0141-2.

[7] ح. انشائی، ح. زراعتگر، “تهیه نرم افزار معادلات غیرخطی حرکات شناور در موج جهت آنالیز پارامتریک رولینگ”، ششمین همایش ملی صنایع دریایی ایران، ۱۳۸۳.

[8] ب. شعبانی، م. سیف، “بررسی شرایط وقوع رزونانس پارامتریک در کشتی ها، نهمین همایش ملی صنایع دریایی ایران، ۱۳۸۶.

[9] ع. جهانبخش، ا. مسعودی، “معیارهای نسل دوم پایداری شناورها در حالت سالم”، هفدهمین همایش صنایع دریایی، ۱۳۹۴.

[10] E. Masoudi, “Second Generation IMO Intact Stability Vulnerability Criteria and its Application to ships Navigating in Persian Gulf and Oman Sea,” *ijmt*, vol. 7, pp. 39–48, Mar. 2017, doi: 10.18869/acadpub.ijmt.7.39.

[11] L. Dostal and E. Kreuzer, “Probabilistic approach to large amplitude ship rolling in random seas,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 225, no. 10, pp. 2464–2476, Oct. 2011, doi: 10.1177/0954406211414523.

[12] J. Choi and J. J. Jensen, “Extreme value predictions using FORM for ship roll motions,” *Marine Structures*, vol. 66, pp. 52–65, Jul. 2019, doi: 10.1016/j.marstruc.2019.03.001.

[13] J. J. Jensen, J. Choi, and U. D. Nielsen, “Statistical prediction of parametric roll using FORM,” *Ocean Engineering*, vol. 144, pp. 235–242, Nov. 2017, doi: 10.1016/j.oceaneng.2017.08.029.

[14] G. Bulian, “On an improved Grim effective wave,” *Ocean Engineering*, vol. 35, no. 17–18, pp. 1811–1825, Dec. 2008, doi: 10.1016/j.oceaneng.2008.08.016.

[15] L. Dostal and E. Kreuzer, “Assessment of Extreme Rolling of Ships in Random Seas,” in *Volume 7: Ocean Space Utilization; Professor Emeritus J. Randolph Paulling Honoring Symposium on Ocean Technology*, San Francisco, California, USA, Jun. 2014, p. V007T12A007. doi: 10.1115/OMAE2014-23458.

[16] X. Zhou, H. Li, and Y. Huang, “Stochastic averaging for estimating a ship roll in random longitudinal or oblique waves,” *Marine Structures*, vol. 75, p. 102814, Jan. 2021, doi: 10.1016/j.marstruc.2020.102814.

[17] “SDEINT.” <https://pypi.org/project/sdeint/>

[18] J. Lu, N. Umeda, and K. Ma, “Predicting parametric rolling in irregular head seas with