

تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی ساخته شده از مواد FGM

شاهرخ حسینی هاشمی^۱, سید رسول آتشی‌پور^{۲*}, محمود کریمی^۳, مهدی اسحاقی^۴

- ۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران
- ۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران
- ۳- کارشناس ارشد، شرکت مهندسی و ساخت توربین مپنا (توگا)
- ۴- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کنکوردیا

چکیده

در این مقاله، یک تحلیل ارتعاشات آزاد برای ورق‌های بیضوی ساخته شده از مواد هدفمند FGM با شرایط مرزی مختلف بر پایه روش چند جمله‌ای- ریتز و تئوری کلاسیک ورق ارائه شده است.تابع پذیرفتگی پیشنهاد شده علاوه بر دقیق بالا برای فرکانس‌های طبیعی بدست آمده دارای این قابلیت است که برای شرایط مرزی متنوع کلاسیک، یعنی لبه گیردار، لبه آزاد و تکیه گاه ساده مورد استفاده قرار گیرد. فرض شده است که خواص مکانیکی ورق FGM بصورت پیوسته و براساس یک قانون تابع توانی از کسر حجمی مواد سازنده در راستای ضخامت تغییر می‌کند. همگرایی روش چند جمله‌ای- ریتز اعمال شده مورد بررسی قرار گرفته است و صحت حل ارائه شده با انجام یک مقایسه جامع با نتایج حاصل از مطالعات موجود در منابع برای ورق بیضوی همگن و ورق دایروی FGM بررسی شده است. ضمن آنکه مقایسه نتایج حاصل از تحلیل حاضر با نتایج المان محدود، صحت حل انجام شده برای ورق‌های بیضوی FGM را تایید می‌کند. در پایان اثر هندسه ورق و پارامتر غیر همگنی خواص بر فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار گرفته است و شکل مودهای مربوط به حالات متقارن- متقارن، پادمتقارن، پادمتقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: ورق بیضوی، مواد هدفمند FGM، فرکانس طبیعی، روش چند جمله‌ای- ریتز

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Elliptical Plates

Sh. Hosseini Hashemi¹, S.R. Atashipour², M. Karimi³, M. Es'haghi⁴

1- Professor, School of Mechanical Eng., Iran University of Science and Technology

2- PhD Candidate, School of Mechanical Eng., Iran Univ. of Science and Technology

3- MSc in Mechanical Eng., MAPNA Turbine Eng. and Manufacturing Co. (TUGA)

4- PhD student, Department of Mechanical Engineering, Concordia University

Abstract

This paper deals with a free vibration analysis of functionally graded elliptical plates with different classical boundary conditions on the basis of polynomial-Ritz method and classical plate theory. The proposed admissible function is capable to obtain accurate natural frequencies of various classical boundary conditions namely, clamped, free and simply supported edges. The mechanical properties of the FG plate are assumed to vary continuously through the thickness of the plate and obey a power law distribution of the volume fraction of the constituents. The convergency of applied polynomial-Ritz method is investigated. In order to verify the accuracy of the present solution, a comprehensive comparison study is performed

* نویسنده مسئول مقاله atashipour@iust.ac.ir

with the available results in the literature for homogeneous elliptical plate and FG circular plate. Also, the numerical results of the present solution for FG elliptical plate are compared with those of the finite element method (FEM). Finally, the effects of the plate geometry and inhomogeneity on the natural frequencies are investigated and some vibrational mode shapes related to symmetric-symmetric, symmetric-antisymmetric, antisymmetric-symmetric and antisymmetric-antisymmetric states are presented.

Keywords: Elliptical plate, Functionally Graded Materials, Natural Frequency, polynomial-Ritz method

روش تحلیلی، یانگ و شن^۴ [۴] ارتعاشات آزاد و گذراي ورق های نازک FGM مستقر بر روی بستر الاستیک، تحت تنش اولیه‌ی صفحه‌ای و بار خارج صفحه‌ای را بررسی کردند. همچنین شن [۵] و یانگ و شن [۶] با استفاده از تئوری ورق نازک و روش اختلالات، مسئله‌ی جابجایی‌های بزرگ و پسا کمانش یک ورق FGM تحت بار حرارتی را تحلیل نمودند. اللهوردی زاده و همکارانش^۵ [۷] با بکارگیری یک روش نیمه تحلیلی، ارتعاشات غیر خطی نامتقارن ورق‌های دایروی نازک FGM را مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعاتی که به تازگی صورت پذیرفته است حسینی هاشمی و همکارانش^۶ ارتعاشات و کمانش ورق‌های نازک دایروی، حلقوی و قطاع دایروی FGM بر روی بستر الاستیک را با استفاده از روش حداقل تفاضل مربعات (DQM)^۷ مورد بررسی قرار داده‌اند [۸].

در بسیاری از موارد تحلیل و طراحی ورق‌هایی با اشکال هندسی خاص و بدست آوردن اطلاعاتی پیرامون فرکانس‌های اساسی آن‌ها مورد توجه محققان بوده است. با وجود آنکه اطلاعات جامعی در مورد ارتعاشات ورق‌های دایروی و مستطیلی موجود می‌باشد اما ارتعاشات ورق‌های بیضوی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. این نوع ورق‌ها دارای کاربردهای صنعتی قابل توجهی هستند که از آن جمله می‌توان به صفحه پایه در قایق‌های بادبانی، صفحه بکسل یدک‌کش‌ها و ورق‌های بکار گرفته شده در مبدل‌های حرارتی ویژه صنایع کشتی‌سازی اشاره نمود. لیسا^۸ [۱۰و۱۱] اطلاعات کاملی را پیرامون ورق‌های بیضوی با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد ارائه نمود و فرکانس‌های اساسی ورق‌های بیضوی با لبه ساده را بدست آورد. پس از آن، مطالعات دیگری در زمینه تحلیل ارتعاشات این ورق‌ها صورت پذیرفت که از نمونه‌های آن می‌توان به کار

۱- مقدمه

مواد هدفمند FGM^۹ نسل جدیدی از مواد مركب می‌باشند که اولین بار توسط دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ معرفی شده‌اند [۱و۲]. خواص مواد FGM بطور پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کند. این خصوصیت باعث می‌گردد که مشکل ناپیوستگی تنش در مواد مركب لایه‌ای بر طرف شده و توزیع تنش FGM یکنواخت شود. یکی دیگر از مزایای مواد FGM مقاومت بالای آنها در مقابل دماهای بسیار زیاد است که موجب بهره‌گیری از این مواد به عنوان سپر حرارتی می‌شود. معمولاً مواد FGM از دو جنس متفاوت مثل سرامیک و فلز ساخته می‌شوند تا همزمان خواص عالی مکانیکی و حرارتی را داشته باشد. با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد مواد FGM، هر روز بر دامنه کاربردهای این مواد در صنایع مختلف مهندسی نظری کشته‌سازی افزوده می‌شود. به عنوان نمونه در سال‌های اخیر، استفاده از ورق‌های FGM برای ساخت مبدل‌های حرارتی در سیستم‌های تهویه مطبوع HVAC^{۱۰} (فشار بالا ویژه صنایع کشتی‌سازی)، مورد توجه شرکت‌های سازنده معتبر بین‌المللی قرار گرفته است.

در دهه گذشته، محققان زیادی به مطالعه دینامیک و ارتعاشات ورق‌های FGM پرداخته‌اند که دلیل عده آن کاربرد مطالعات مذکور در طراحی مناسب این سازه‌ها برای جلوگیری از شکست و تخریب آنها در مقابل پدیده‌های نظری خستگی، تشید و تنش‌های سنگین دینامیکی می‌باشد. اکثر کارهای صورت گرفته بر روی ورق‌های نازک و با روش‌های نیمه تحلیلی و عددی بوده است. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک مستطیلی FG با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار توسط آبریت^{۱۱} [۳] صورت پذیرفته است. بر اساس یک

$$V_m + V_c = 1 \quad (1)$$

که در آن V_c و V_m به ترتیب کسر حجمی قسمت سرامیکی و فلزی سازه می‌باشند. براساس توزیع قاعده توانی که بهوسیله پراوین و ردی^{۱۲} [۱۵] ارائه شده است، پارامتر تغییرات کسر حجمی سرامیک در راستای ضخامت به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^g, \quad g \geq 0 \quad (2)$$

که در آن z مختصه راستای ضخامت ورق بوده و h ضخامت آن می‌باشد. همچنین، g شاخص گرادیان است که مقادیر بزرگتر و یا مساوی صفر را به خود می‌گیرد. تمامی خواص مکانیکی ورق FGM نظیر چگالی و مدول الاستیسیته بر اساس این پارامتر تغییر و تعریف می‌گردد. همچنین ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که به دلیل محدوده کوچک تغییرات نسبت پواسون و تاثیر ناچیز این تغییرات بر پاسخ مساله، اغلب مطالعات انجام شده در راستای تحلیل مسائل ورق‌های FGM، مقدار ثابتی را برای این پارامتر در نظر گرفته‌اند (به عنوان نمونه مراجع [۲۲-۱۶] را ببینید). بر این اساس، پارامترهای ورق FG به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m \\ v(z) &= v \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه بالا شاخص m و c به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌نمایند. رابطه بالا یک قاعده ساده می‌باشد که با استفاده از آن می‌توان خواص ورقی که دارای اجزای سرامیکی و فلزی است را بدست آورد. هنگامیکه $g = 0$ آنگاه ورق همگنی از جنس سرامیک خواهیم داشت و با افزایش شاخص گرادیان، خواص فلزی افزایش می‌یابند. در حالتی که شاخص گرادیان برابر واحد است خواص مواد به صورت خطی در راستای ضخامت ورق تغییر می‌نماید.

سینگ و تیاگی^۹ [۱۲] برای بررسی ارتعاشات عرضی ورق گیردار بیضوی اشاره نمود. وی در تحلیل خود فرض نمود که جابجایی‌ها مشابه با ارتعاشات متقاضی محوری در ورق‌های دایروی باشند. پس از آن چندین کار در زمینه بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی با شرط مرزی آزاد صورت پذیرفت. به عنوان مثال برس [۱۳] با بکارگیری روش ریتز توانست فرکانس‌های ورق آزاد بیضوی را بدست آورد. از جمله مطالعاتی که اخیراً بر روی ورق‌های بیضوی انجام شده است می‌توان به کار سریباسی و آلتای^{۱۰} [۱۴] برای بررسی ارتعاشات این سازه‌ها با ضخامت ثابت و متغیر با استفاده از روش ریتز اشاره نمود.

اگرچه مطالعات محدودی در زمینه ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی همگن در منابع یافت می‌شود، اما کمتر به بررسی ارتعاشات ورق‌های بیضوی ساخته شده از مواد هدفمند FG پرداخته شده است. از این رو، در این پژوهش، با بهره‌گیری از روش چند جمله‌ای- ریتز و یکتابع پذیرفتی مناسب، ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی FG مورد مطالعه قرار گرفته است و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مربوط به این ورق‌ها بدست آمده است. پس از ارزیابی همگرایی روش و صحت حل ارائه شده، تأثیر پارامترهای مهم مساله بررسی شده است و شکل مودهای مربوط به حالات متقاضی- متقاضی، متقاضی- پادمتقاضی، پادمتقاضی- متقاضی و پادمتقاضی- پادمتقاضی ارائه شده است.

۲- مواد هدفمند FGM

امروزه مواد FGM دارای فرایند ساخت راحتی می‌باشند و نحوه تغییر خواص در آنها را به سادگی می‌توان کنترل نمود. از این رو می‌توان با طراحی مناسب، بهترین الگوی تغییرات خواص را برای حصول عملکرد مناسب سازه جهت ساخت آن معرفی نمود. تاکنون مدل‌های مختلفی برای بیان نحوه توزیع و تغییر خواص مواد FG ارائه شده است. یکی از مهمترین مدل‌های معرفی شده توسط محققان، مدل ساده توانی می‌باشد. چنانچه ماده FG از ترکیب سرامیک و فلز ساخته شده باشد آنگاه خواهیم داشت

دوگانه است که برای بدست آوردن فرکانس های اساسی ورق لازم می باشد. اگرچه این تابع جوابهای دقیقی را برای فرکانس اول ورق نتیجه می دهد اما توانایی استخراج فرکانس های دقیق در مودهای ارتعاشی بالاتر را دارا نمی باشد. بنابراین نیاز است که از یک تابع پذیرفتی مناسب تر استفاده کرد، به نحوی که بتوان با بهره گیری از آن فرکانس های دقیقی را برای مودهای ارتعاشی مختلف ورق FGM بدست آورد و علاوه بر آن، برای شرایط مرزی مختلف قابل استفاده باشد. یک تابع آزمایشی مناسب که همه ویژگی های ذکر شده را دارا باشد، به صورت زیر است

$$W = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^k \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \alpha_{ij} x^i y^j \quad (6)$$

در رابطه بالا α_{ij} ضرایب مجهول می باشند و k نیز ضریب ثابتی است که برای ارضای شرایط مرزی مختلف بکار گرفته می شود و به صورت زیر تعریف می گردد

$$\begin{aligned} & \text{: شرط مرزی لبه آزاد} & k = 0 \\ & \text{: شرط مرزی تکیه گاه ساده} & k = 1 \\ & \text{: شرط مرزی لبه گیردار} & k = 2 \end{aligned} \quad (7)$$

به منظور حل ریتز لازم است که انرژی های جنبشی و پتانسیل ورق محاسبه شوند. انرژی پتانسیل کرنشی برای یک ورق نازک بیضوی به صورت زیر تعریف می گردد

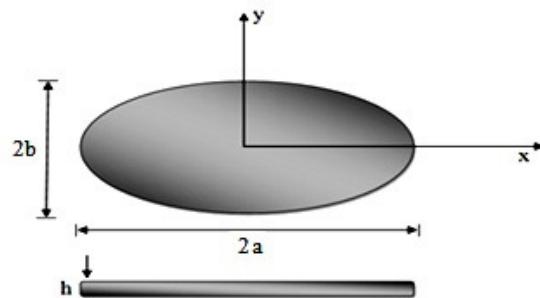
$$V = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (8)$$

در رابطه بالا ϵ_x ، ϵ_y و γ_{xy} مولفه های کرنش هستند که از جایگذاری مولفه های میدان تغییر مکان در روابط کرنش-تغییر مکان خطی به صورت زیر بدست می آیند

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

۳- تحلیل ریتز برای ارتعاشات ورق بیضوی FGM

مطابق شکل زیر، ورق FGM بیضوی نازکی را در نظر بگیرید که دارای شعاع بزرگ a ، شعاع کوچک b و ضخامت h می باشد.



شکل ۱- نمایی از یک ورق بیضوی

براساس تئوری کلاسیک ورق، میدان جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

اولین قدم در حل ریتز یافتن یک تابع پذیرفتی مناسب می باشد، به نحوی که موجب دستیابی به یک حل ساده و در عین حال دقیق شود. با در نظر داشتن معادله تابع بیضی، یک تابع آزمایشی برای تخمین جابجایی صفحه میانی ورق را می توان به شکل زیر در نظر گرفت

$$W = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\alpha_1 \frac{x^2}{a^2} + \alpha_2 \frac{y^2}{b^2} + \alpha_3 \right) \quad (5)$$

در رابطه بالا α_1 ، α_2 و α_3 سه ضریب مجهول می باشند. لیسا [۱۰] از این تابع شکل برای بدست آوردن فرکانس های یک ورق بیضوی با شرایط مرزی ساده استفاده نمود و برای بسیاری از نسبت ضخامتها و ضرایب پواسون مختلف جوابهای مناسبی را استخراج نمود. این تابع تغییر شکل دارای توانایی تشکیل تقارن

می‌توان نشان داد که مقدار بیشینه انرژی پتانسیل چنین خواهد بود

$$V_{Max} = \int \int \int_V \frac{z^2 E(z)}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dV \quad (15)$$

رابطه بالا برای ورق‌های FG براساس مدل پراوین-ردی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$V_{Max} = \frac{h^3}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{(g^2 + g + 2)(E_c - E_m)}{(g+1)(g+2)(g+3)} + \frac{1}{3} E_m \right) \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (16)$$

به منظور بکارگیری روش ریتز از تابع لاغرانژین به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\Pi = V_{Max} - T_{Max} \quad (17)$$

به منظور دستیابی به حل ریتز لازم است آن دسته از توابع پذیرفتی بدست آیند که به ازای آنها انرژی مکانیکی ورق کمینه شود، یعنی

$$\delta \Pi = \Pi(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w) - \Pi(u, v, w) = 0 \quad (18)$$

همانطور که قبلاً ذکر شد، تابع آزمایشی را به صورت رابطه (۶) در نظر می‌گیریم. در این رابطه تنها ضرایب α_{ij} مجهول می‌باشد. چنانچه مرتبه چند جمله‌ای در تابع آزمایشی $N_i + N_j$ باشد، آنگاه از رابطه بالا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{00}} \delta \alpha_{00} + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{01}} \delta \alpha_{01} + \\ &\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{10}} \delta \alpha_{10} + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{N_i N_j}} \delta \alpha_{N_i N_j} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

برای یافتن رابطه مولفه‌های تنش از روابط تنش-کرنش هوك در حالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (10)$$

انرژی جنبشی برای ورق‌های نازک نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{w})^2 dx dy dz \quad (11)$$

علامت نقطه بالای w به معنای مشتق نسبت به زمان می‌باشد. با استفاده از رابطه بالا می‌توان انرژی جنبشی را بر حسب جابجایی عرضی ورق بدست آورد. برای حل ارتعاشات آزاد، تابع جابجایی عرضی ورق به شکل زیر تعریف می‌شود

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin(\omega t) \quad (12)$$

در رابطه بالا W تابع آزمایشی بوده و ω فرکانس طبیعی ورق را نشان می‌دهد. از جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۱۱) می‌توان انرژی جنبشی را محاسبه کرد. بنابراین، مقدار بیشینه انرژی جنبشی به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$T_{Max} = \frac{\omega^2}{2} \iint_V \rho(z) W^2 dV \quad (13)$$

از جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه بالا و ساده‌سازی به مقدار بیشینه انرژی جنبشی در ورق‌های FG بر اساس مدل پراوین-ردی به شکل زیر می‌رسیم:

$$T_{Max} = \frac{1}{2} h \omega^2 \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{g+1} \right) \iint_A W^2 dA \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۸) به سادگی

حاصل از پژوهش حاضر، از خواص دو نوع ماده FG استفاده شده است که عبارتند از آلمینیوم-آلومینا و فولاد-نیکل. برای سهولت این دو نوع ماده را به ترتیب با FGM1 و FGM2 نشان می‌دهیم. خواص مکانیکی مربوط به این مواد FG در جدول ۱ ارائه شده است.

به منظور نشان دادن نحوه تغییرات خواص مکانیکی ورق FG در راستای ضخامت، تغییرات مدول الاستیسیته ماده FGM1 و FGM2 به ازای مقادیر مختلف شاخص گرادیان ترسیم و در شکل ۲ ارائه شده است.

در این پژوهش، برای ارائه نتایج عددی کلی‌تر، فرکانس‌های ورق به صورت بدون بعد آورده شده است که چنین تعریف می‌گردد

$$\lambda^2 = \omega b^2 \sqrt{\rho_m h / D} \quad (21)$$

در رابطه مذکور ρ_m و D به ترتیب چگالی فلز و سفتی (صلبیت) خمی ورق همگن می‌باشند. لازم به ذکر است که سفتی خمی ورق همگن با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$D = \frac{E_m h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (22)$$

همچنین، نسبت پواسون بجز مواردی که مقدار آن در جدول مشخص شده است، در سایر موارد برابر با 0.3 در نظر گرفته شده است.

از رابطه بالا، تعداد $(N_i + 1)(N_j + 1)$ معادله مستقل زیر بر حسب ضرایب α_{ij} بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{00}} &= 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{01}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{10}} = 0, \\ \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{N_i N_j}} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

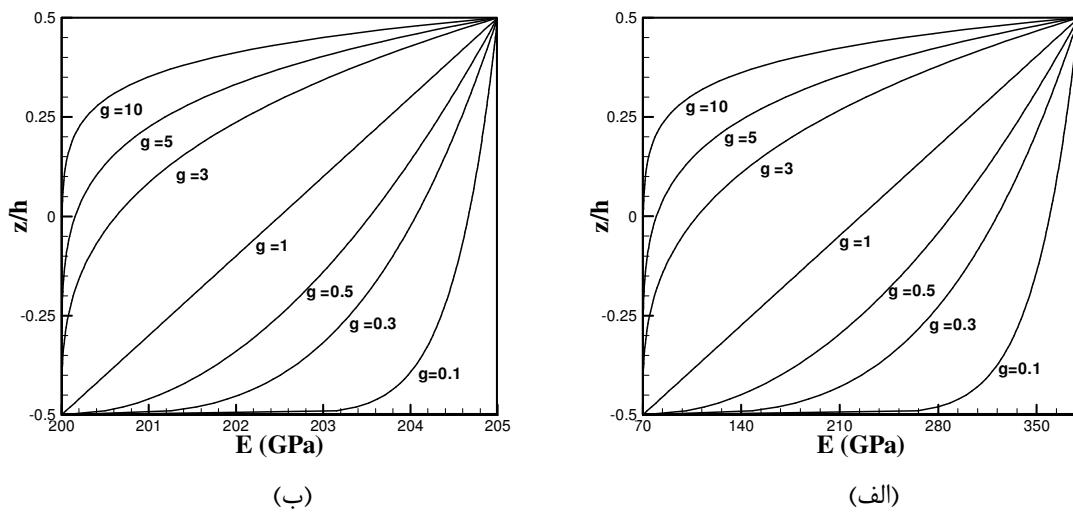
معادلات بالا دارای جواب بدیهی صفر هستند. جواب غیر بدیهی معادلات بالا که از صفر قرار دادن دترمینان ضرایب بدست می‌آید، همان معادله مشخصه ورق است که در برگیرنده فرکانس‌های طبیعی آن می‌باشد. مسلماً با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای رابطه (۶)، تعداد معادلات تشکیل دهنده مساله مقادیر ویژه افزایش یافته و نتیجتاً به تعداد بیشتری از بینهایت فرکانس طبیعی ورق دست خواهیم یافت، ضمن اینکه دقت فرکانس‌های حاصله نیز افزایش می‌یابد. متناظر با هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه برای ضرایب مجھول α_{ij} وجود دارد. با جایگذاری مولفه‌های هر یک از بردارهای ویژه مذکور در معادله (۶)، شکل مود متناظر با آن فرکانس طبیعی (مقدار ویژه) بدست می‌آید.

۴- بحث و بررسی نتایج عددی

بر اساس تئوری کلاسیک ورق و با استفاده از روش ریتز تشریح شده در قسمت قبل، یک کد کامپیوتری در نرم‌افزار MATHEMATICA توسعه داده شده است که با استفاده از آن می‌توان فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق بیضوی FGM را با شرایط مرزی مختلف بدست آورد. به منظور بررسی نتایج عددی

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد FG آلمینیوم-آلومینا و فولاد-نیکل

E_m (Gpa)	ρ_m (kg/m^3)	E_c (Gpa)	ρ_c (kg/m^3)	نوع ماده
آلومینیوم (Al) ۷۰	۲۷۰۰	۳۸۰	۳۸۰۰	FGM1
فولاد (St) ۲۰۰	۷۸۰۰	۲۰۵	۸۹۰۰	FGM2



شکل ۲- تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت: (الف): ورق FGM1، (ب): ورق FGM2

جدول ۲- بررسی همگرایی فرکانس‌های طبیعی بر حسب هرتز (Hz) برای یک ورق بیضوی FG

ω_3	ω_2	ω_1	$N_i \times N_j$	نوع مود
۷۷/۸۳۳۱	۳۶/۲۵۴۵	۳/۹۷۱۷۴	۲×۲	
۳۱/۵۱۵۵	۲۵/۱۱۴۵	۳/۵۷۷۷۶	۳×۳	
۳۱/۰۵۴۱	۱۷/۸۸۶۷	۳/۵۶۱۴۰	۴×۴	SS
۳۱/۰۴۹۳	۱۷/۱۸۲۲	۳/۵۶۱۳۸	۵×۵	
۳۱/۰۴۹۱	۱۷/۱۶۵۷	۳/۵۶۱۳۸	۶×۶	
۳۱/۰۴۹۱	۱۷/۱۶۵۰	۳/۵۶۱۳۸	۷×۷	
۱۳۰/۵۷۷	۳۷/۱۸۵۵	۸/۲۷۳۶۳	۲×۲	
۸۱/۴۸۵۴	۲۷/۰۰۷۳	۸/۲۲۹۹۵	۳×۳	
۵۶/۷۰۰۶	۲۵/۸۶۰۳	۸/۲۲۹۶۹	۴×۴	AA
۵۱/۳۵۷۴	۲۵/۸۱۱۶	۸/۲۲۹۶۸	۵×۵	
۵۰/۸۴۱۶	۲۵/۸۱۰۷	۸/۲۲۹۶۸	۶×۶	
۵۰/۸۳۹۸	۲۵/۸۱۰۶	۸/۲۲۹۶۸	۷×۷	
۱۷۲/۳۴۷	۱۱۳/۵۵۹	۴۶۱۹/۲۰	۲×۲	
۸۳/۴۵۶۱	۵۸/۵۹۰۷	۱۶/۵۴۸۱	۳×۳	
۸۰/۳۱۷۶	۴۰/۲۷۳۵	۱۶/۲۲۷۱	۴×۴	SA
۷۶/۲۰۱۹	۳۷/۴۹۱۲	۱۶/۲۲۰۱	۵×۵	
۶۷/۶۴۹۰	۳۷/۳۰۳۲	۱۶/۲۲۰۰	۶×۶	
۶۷/۵۲۳۴	۳۷/۲۹۵۳	۱۶/۲۲۰۰	۷×۷	
۱۰۸/۹۶۰	۴۹/۰۲۴۰	۱۱/۷۱۸۲	۲×۲	
۴۷/۱۵۷۵	۴۰/۹۴۶۲	۹/۲۸۵۶۵	۳×۳	
۴۲/۴۲۴۶	۲۹/۷۴۰۵	۹/۱۲۳۰۹	۴×۴	AS
۴۲/۳۷۳۶	۲۷/۷۵۵۳	۹/۱۲۱۶۹	۵×۵	
۴۲/۳۷۱۲	۲۷/۶۶۴۸	۹/۱۲۱۶۹	۶×۶	
۴۲/۳۷۱۱	۲۷/۶۶۲۳	۹/۱۲۱۶۹	۷×۷	

یکی از معیارهای نشان‌دهنده صحت روش ریتز آن است که با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای تابع پذیرفتی، مقادیر عددی حاصل از حل غیر بدیهی مساله به سمت اعداد مشخصی همگرا شوند که همان فرکانس‌های طبیعی ورق هستند. بدین منظور، در جدول ۲ همگرایی مذکور برای یک ورق بیضوی FGM2 با شرط مرزی آزاد بررسی شده است. در این جدول سه فرکانس طبیعی اول ورق بیضوی با شعاع کوچک ۱، شعاع بزرگ ۳ و ضخامت ۰/۰۲ متر آورده شده است. شاخص گرادیان در این حالت برابر با واحد در نظر گرفته شده است. مقادیر عددی این جدول به خوبی همگرایی حل ارائه شده را با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای (N_i و N_j) نشان می‌دهد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که نباید افزایش زمان اجرای برنامه کامپیوترا برای تعداد زیاد N_i و N_j را دور از نظر داشت.

اختصار AS، SA، SS و AA به ترتیب نشان‌دهنده مودهای متقارن- پادمتقارن، پادمتقارن-متقارن، متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- پادمتقارن می‌باشند. تقارن‌های مذکور نسبت به محورهای کوچک و بزرگ بیضوی می‌باشد.

در جدول ۴ نیز مقایسه‌ای مشابه با جدول ۳ برای ورق FG با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده انجام شده است. در هر دو جدول ۳ و ۴، درصد اختلاف بین نتایج روش حاضر و سایر روش‌ها محاسبه و ارائه شده است. این درصد اختلاف از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\%Diff = \frac{[(OMs) - (PM)]}{(OMs)} \times 100 \quad (22)$$

OMs: روش‌ها
PMs: روش حاضر

در این جداول، ۱ و ۲ %Diff به ترتیب نشان-دهنده درصد خطای روش حاضر نسبت به حل تحلیلی و حل المان محدود می‌باشد. همانگونه از جدول ۳ و ۴ مشخص است، همخوانی بسیار عالی بین نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر و نتایج مربوط به مطالعه عجفری مهرآبادی و همکاران [۲۳]، صحت حل انجام شده را تأیید می‌کند.

به منظور حصول اطمینان از صحت حل صورت پذیرفته، در جداول ۳ و ۴ یکسری مقایسه بین نتایج عددی مربوط به پژوهش حاضر و مطالعه تحلیلی عجفری مهرآبادی و همکاران [۲۳] برای ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک دایروی FG انجام شده است. بدین منظور شعاع‌های کوچک و بزرگ بیضی مساوی با یکدیگر و برابر با 0.6 متر فرض شده است. لازم به ذکر است که مطالعه مرجع [۲۳] بر مبنای روش جدادسازی متغیرها برای ورق‌های دایروی انجام شده است.

مقایسه انجام شده در جدول ۳ برای یک ورق دایروی FGM2 است که دارای ضخامت 0.2 متر با لبه‌های گیردار می‌باشد. این مقایسه به ازای مقادیر مختلف شاخص گرادیان انجام شده است. علاوه بر این، نتایج مربوط به تحلیل المان محدود که از مدل‌سازی نرم-افزاری توسط همین مرجع انجام شده، ارائه شده است. مقدار n مشخص‌کننده تعداد گره‌های قطری در شکل مود ارتعاشی فرکانس مربوطه می‌باشد.

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های ورق دایروی FG بر حسب هertz (Hz) با شرایط مرزی لبه گیردار

%Diff 2	%Diff 1	FEM [۲۳]	[۲۳] مرجع	Present	<i>n</i>	<i>g</i>
-0.163	-0.00	139/29	138/41	138/413	0	0
-0.055	-0.005	289/80	288/05	288/210	1	
-0.02	-0.017	473/48	472/55	473/372	2	
-0.163	-0.01	135/47	134/63	134/811	0	1
-0.056	-0.004	281/86	280/17	280/292	1	
-0.03	-0.016	460/49	459/62	460/367	2	
-0.074	-0.01	133/68	132/70	132/692	0	3
-0.166	-0.004	278/14	276/19	276/297	1	
-0.113	-0.016	454/42	453/09	453/807	2	
-0.076	-0.02	132/11	132/12	132/97	0	5
-0.168	-0.004	276/95	274/96	275/058	1	
-0.115	-0.016	452/47	451/06	451/771	2	
-0.076	-0.02	132/83	131/85	131/822	0	7
-0.168	-0.004	276/36	274/39	274/486	1	
-0.115	-0.016	451/51	450/13	450/832	2	
-0.181	-0.02	132/75	131/69	131/669	0	9
-0.074	-0.003	276/20	274/09	274/166	1	
-0.113	-0.016	450/90	449/60	450/306	2	
-0.074	-0.02	132/60	131/64	131/615	0	10
-0.166	-0.003	275/89	273/96	274/055	1	
-0.114	-0.016	450/74	449/42	450/123	2	

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های ورق دایروی FG بر حسب هرتز (Hz) با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

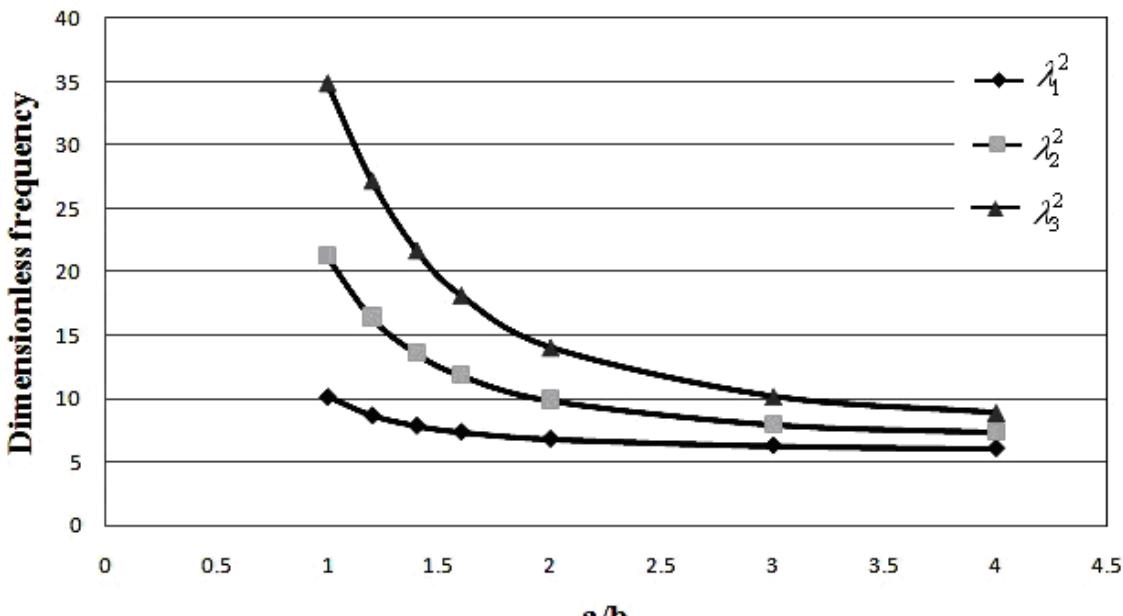
%Diff 2	%Diff 1	FEM [۲۳]	مرجع [۲۳]	تحلیل حاضر	n	g
-۰/۶۰	-۰/۰۰	۶۷/۲۷	۶۶/۸۶	۶۶/۸۶۵۹	.	.
-۰/۶۷	-۰/۰۱	۱۸۹/۵۸	۱۸۸/۳۱	۱۸۸/۳۱۱	۱	
-۰/۶۵	-۰/۰۰	۳۴۹/۳۶	۳۴۷/۰۴	۳۴۷/۱۰۳	۲	
-۰/۵۲	-۰/۰۱	۶۵/۳۷	۶۵/۰۳	۶۵/۰۲۸۸	.	۱
-۰/۶۷	-۰/۰۳	۱۸۴/۳۸	۱۸۳/۱۶	۱۸۳/۱۳۷	۱	
-۰/۶۵	-۰/۰۱	۳۳۹/۷۸	۳۳۷/۴۶	۳۳۷/۵۶۷	۲	
-۰/۶۳	-۰/۰۱	۶۴/۵۱	۶۴/۱۱	۶۴/۱۰۲۱	.	۳
-۰/۷۸	-۰/۰۰	۱۸۱/۹۵	۱۸۰/۵۵	۱۸۰/۵۲۷	۱	
-۰/۷۶	-۰/۰۱	۳۳۵/۳۱	۳۳۲/۷۵	۳۳۲/۷۵۶	۲	
-۰/۶۵	-۰/۰۲	۶۴/۲۳	۶۳/۸۲	۶۳/۸۱۴۶	.	۵
-۰/۸۰	-۰/۰۰	۱۸۱/۱۷	۱۷۹/۷۵	۱۷۹/۷۱۸	۱	
۲/۲۴	-۰/۰۱	۳۳۸/۸۷	۳۳۱/۲۵	۳۳۱/۲۶۳	۲	
-۰/۶۴	-۰/۰۱	۶۴/۰۹	۶۳/۶۹	۶۳/۶۸۱۹	.	۷
-۰/۸۰	-۰/۰۰	۱۸۰/۷۹	۱۷۹/۳۷	۱۷۹/۳۴۴	۱	
-۰/۷۷	-۰/۰۰	۳۳۳/۱۵	۳۳۰/۵۶	۳۳۰/۵۷۵	۲	
-۰/۶۱	-۰/۰۲	۶۴/۰۱	۶۳/۶۲	۶۳/۶۰۷۶	.	۹
-۰/۷۷	-۰/۰۱	۱۸۰/۵۵	۱۷۹/۱۶	۱۷۹/۱۳۵	۱	
-۰/۷۹	-۰/۰۰	۳۳۲/۸۳	۳۳۰/۱۸	۳۳۰/۱۸۹	۲	
-	-	-	-	۶۳/۵۸۱۸	.	۱۰
-۰/۷۶	-۰/۰۲	۱۸۰/۴۸	۱۷۹/۱۰	۱۷۹/۰۶۲	۱	
-۰/۷۶	-۰/۰۰	۳۳۲/۵۹	۳۳۰/۰۶	۳۳۰/۰۵۵	۲	

این جدول، تکیه‌گاه ساده می‌باشد. لازم به ذکر است که شکل بی‌بعد فرکانس طبیعی که با رابطه (۲۱) تعریف شده است، در تئوری کلاسیک ورق مستقل از ضخامت آن است. نتایج این جدول نیز همخوانی و سازگاری بسیار مناسب بین نتایج را تایید می‌نماید. همانگونه که مشخص است با افزایش نسبت قطرها، فرکانس‌های طبیعی ورق کاهش می‌یابند.

مسلمان، هنگامیکه شاخص گرادیان به سمت صفر میل می‌کند، ورق به صورت همگن در می‌آید. در جدول ۵، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق همگن بیضوی با نسبت‌های متفاوتی از قطر کوچک به قطر بزرگ، با مقادیر مشابه بدست آمده توسط سریباسی و آلتای [۱۴]، لیسا [۱۱] و سینگ و چاکراورتی [۲۴] مقایسه شده است. شرط مرزی فرض شده برای ورق در

جدول ۵- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق بیضوی ایزوتروپیک همگن

$V=0/25$	$V=0/5$	a/b
مرجع [۱۱] تحلیل حاضر	مرجع [۱۱] تحلیل حاضر	
۴/۸۶۰۱۳	۴/۸۶۰۱	۴/۸۶۵
۴/۴۴۸۹۵	۴/۴۴۹۰	۴/۴۵۴
۴/۱۵۲۵۹	۴/۱۵۲۶	۴/۱۵۷
۳/۷۶۷۸۷	۳/۷۶۷۹	۳/۷۷۳
۳/۴۵۵۴۸	۳/۴۵۵۵	۳/۴۶۳
۳/۲۸۱۲۷	۳/۲۸۱۳	۳/۲۹۲
۳/۱۰۹۸۰	۳/۱۰۹۸	۳/۱۲۸
۳/۰۰۱۴۱	۳/۰۰۱۴	۳/۰۲۷
مرجع [۲۴] تحلیل حاضر	مرجع [۲۴] تحلیل حاضر	
۵/۲۱۲۶۵	۵/۲۱۲۷	۵/۲۱۹
۴/۷۶۶۱۶	۴/۷۶۶۲	۴/۷۷۲
۴/۴۳۵۵۸	۴/۴۳۵۶	۴/۴۴۲
۳/۹۸۹۸۲	۳/۹۸۹۸	۳/۹۹۰
۳/۶۰۷۸۱	۳/۶۰۷۸	۳/۶۱۷
۳/۳۸۶۶۱	۳/۳۸۶۶	۳/۳۹۹
۳/۱۶۹۸۱	۳/۱۶۹۸	۳/۱۸۹
۳/۰۳۸۷۳	۳/۰۳۷۸	۳/۰۶۶



شکل ۳- نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق بیضوی FG بر حسب نسبت قطرها

برای شبیه سازی مدل FGM در این نرم افزار، در راستای ضخامت ورق، ۲۰ ماده همگن مختلف تعریف شده که معرف نحوه تغییر تدریجی خواص مکانیکی ورق در راستای ضخامت می‌باشد. برای تحلیل ارتعاشات آزاد نیز از روش Lanczos استفاده شده است.

در استخراج نتایج نرم افزار، همگرایی فرکانس‌ها مورد بررسی قرار گرفت تا از دقت آنها اطمینان حاصل شود. در این جدول سه فرکانس بی‌بعد اول ورق بیضوی با نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک ۲ و نسبت ضخامت به شعاع کوچک ۰/۰۵ و با شرایط مرزی متفاوت و شاخص گرادیان برابر با واحد آورده شده است. نتایج موجود در جدول گواه آن است که فرکانس‌های بدست آمده از روش ریتز بسیار نزدیک به نتایج المان محدود در نرم افزار ABAQUS می‌باشند.

به منظور بررسی تاثیر شاخص گرادیان، در جدول ۷، فرکانس طبیعی پایه‌ای مربوط به ورق بیضوی FGM2 با شرایط مرزی مختلف و مقادیر متفاوت شاخص گرادیان ارائه شده است. ورق دارای نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک ۲ بوده و نسبت ضخامت به شعاع کوچک ۰/۰۳ فرض شده است.

این امر به دلیل کاهش صلابت ورق می‌باشد، چرا که با افزایش نسبت مذکور، ورق از شکل دایروی به سمت شکل ميله‌ای پیش می‌رود. این مساله عیناً در مورد ورق‌های بیضوی FG نیز صادق است. در تایید این موضوع، نمودار تغییرات سه فرکانس طبیعی اول ورق FG بر حسب نسبت a/b در شکل ۳ نشان داده شده است.

همانگونه که در این شکل مشخص است، هنگامی که نسبت شعاعها برابر با واحد می‌باشد، بیشترین مقدار اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی وجود دارد. حال آن‌که با افزایش این نسبت، مقدار اختلاف مذکور کاهش می‌یابد. ضمن اینکه مقادیر فرکانس‌های ورق نیز کاهش یافته و مجانبوار به سمت مقدار مشخصی میل می‌کنند.

در جدول ۶ نیز نتایج بدست آمده از کد کامپیوتري برای ورق FG با نتایجی که از طریق نرم افزار المان محدود ABAQUS بدست آمده مورد مقایسه واقع شده است. لازم به ذکر است که برای مدل سازی نرم‌افزاری، تعداد ۲۱۴۳۰ المان از نوع C3D20R که از نوع تنش سه-بعدی (3D stress) است، برای رسیدن به فرکانس همگرا شده استفاده شده است. همچنین،

جدول ۶- مقایسه سه فرکانس طبیعی اول بی بعد ورق بیضوی FGM2 با شرایط مرزی مختلف

λ_3^2	λ_2^2	λ_1^2	نوع روش	شرایط مرزی
۹/۲۲۴۹۴	۵/۷۴۸۶۴	۳/۲۱۲۶۱	تحلیل ریتز	تکیه‌گاه ساده المان محدود (آباکوس)
۹/۹۴۵۰۵	۶/۱۴۸۱۸	۳/۳۵۱۴۸		
۲۱/۵۴۱۷	۱۳/۶۹۳۲	۶/۶۵۶۳۲	تحلیل ریتز	
۲۲/۲۷۹۸	۱۴/۸۴۳۴	۶/۶۹۸۸۱	المان محدود (آباکوس)	لبه گیردار المان محدود (آباکوس)
۴/۱۸۴۴۱	۲/۵۶۴۴۹	۱/۶۲۹۴۳	تحلیل ریتز	
۴/۴۶۶۰۵	۳/۲۴۴۵۴	۱/۷۴۵۹۴	المان محدود (آباکوس)	

جدول ۷- تاثیر شاخص گرادیان (g) بر فرکانس‌های بی بعد پایه (λ_i^2) ورق بیضوی FG با شرایط مرزی مختلف

لبه آزاد	تکیه‌گاه ساده	لبه گیردار	g
۱/۶۶۷۶۵	۳/۳۰۳۳۶	۶/۸۴۴۳۶	.
۱/۶۲۱۸۳	۳/۲۱۲۶۱	۶/۶۵۶۳۲	۱
۱/۶۰۶۲۹	۳/۱۸۱۸۳	۶/۵۹۲۵۰	۲
۱/۵۹۸۷۲	۳/۱۶۶۸۳	۶/۵۶۱۴۷	۳
۱/۵۹۴۳۴	۳/۱۵۸۱۶	۶/۵۴۳۵۲	۴
۱/۵۹۱۵۵	۳/۱۵۲۶۲	۶/۵۲۸۲۰	۵
۱/۵۸۹۶۲	۳/۱۴۸۸۲	۶/۵۲۴۱۵	۶
۱/۵۸۸۲۴	۳/۱۴۶۰۷	۶/۵۱۹۴۵	۷
۱/۵۸۷۱۹	۳/۱۴۴۰۰	۶/۵۱۴۱۷	۸
۱/۵۸۶۳۸	۳/۱۴۲۴۰	۶/۵۱۰۸۵	۹
۱/۵۸۵۷۴	۳/۱۴۱۱۲	۶/۵۰۸۲۰	۱۰
۱/۵۸۵۲۲	۳/۱۴۰۰۹	۶/۵۰۶۰۶	۱۱
۱/۵۸۴۷۹	۳/۱۳۹۲۳	۶/۵۰۴۲۹	۱۲

میل کردن شاخص گرادیان به سمت بینهایت، خصوصیات مکانیکی ورق FG به سمت یک ماده همگن میل می‌کند.

در جدول ۸، پنج فرکانس بی بعد اول ورق بیضوی FGM1 با نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک ۲ و نسبت ضخامت به شعاع کوچک ۰/۵، بر اساس هر دو روش ریتز و المان محدود در نرم افزار ABAQUS ارائه شده است. این نتایج عددی برای شرایط مرزی مختلف و با فرض شاخص گرادیان واحد محاسبه شده‌اند. همخوانی مناسب بین مقادیر عددی فرکانس‌های طبیعی بی بعد که از دو روش مختلف بدست آمده‌اند، صحت روش حل تحلیل حاضر را برای ماده FGM1 تایید می‌کند.

همانطور که در این جدول دیده می‌شود، به ازای همه مقادیر شاخص گرادیان و شرایط مرزی مختلف، با افزایش n ، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. این امر به دلیل آن است که ورق در مودهای بالاتر سفتی بیشتری را از خود نشان می‌دهد. نکته دیگری که از این دو جدول استنتاج می‌شود کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق به ازای افزایش شاخص گرادیان می‌باشد. زیرا همانگونه که در شکل ۲ دیده می‌شود، با افزایش شاخص گرادیان، مقدار متوسط سفتی ورق کاهش می‌یابد. نرخ کاهش فرکانس‌ها با افزایش شاخص گرادیان کاهش می‌یابد، به نحوی که، مشاهده می‌شود که پس از آن که شاخص گرادیان از ۷ بیشتر می‌گردد، هیچ تغییر قابل توجهی در مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق مشاهده نمی‌شود، چرا که بر اساس روابط (۲) و (۳)، با

جدول -۸ مقایسه پنج فرکانس طبیعی اول بی بعد ورق بیضوی FGM1 با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	نوع روش	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2	λ_4^2	λ_5^2
تکیه‌گاه ساده المان محدود (آباکوس)	تحلیل ریتز	۵/۳۹۸۰۷	۱۵/۶۵۷۲	۳۳/۳۷۸۰	۴۰/۳۵۷۶	۶۰/۶۸۰۰
	تحلیل ریتز	۵/۴۵۲۴۴	۱۵/۸۵۴۱	۳۳/۷۴۸۹	۴۱/۴۴۵۸	۶۲/۴۵۲۲
لبه گیردار المان محدود (آباکوس)	تحلیل ریتز	۱۱/۱۸۴۵	۲۲/۸۷۱۴	۴۲/۹۶۱۷	۵۴/۰۷۳۳	۷۵/۷۶۶۶
	تحلیل ریتز	۱۱/۲۴۷۵	۲۳/۵۶۴۸	۴۳/۴۵۶۴	۵۵/۱۴۷۹	۷۶/۷۸۶۹
لبه آزاد المان محدود (آباکوس)	تحلیل ریتز	۲/۷۲۵۱۱	۱۱/۳۴۴۰	۱۲/۸۸۳۳	۲۵/۲۴۴۶	۳۱/۷۰۸۰
	تحلیل ریتز	۲/۸۵۴۱۷	۱۱/۸۹۴۷	۱۳/۱۷۳۴	۲۶/۰۴۱۴	۳۲/۲۱۴۵

گردید که می‌توانند در تحلیل‌های مختلف ارتعاشی و دینامیکی برای رسیدن به یک طراحی قابل اعتماد مورد استفاده قرار گیرند. مقایسه‌های متنوع ارائه شده بین نتایج حاصل از مطالعه انجام شده و مقادیر موجود در منابع و همچنین نتایج حاصل از مدل‌سازی المان محدود، به خوبی صحت تحلیل حاضر را نشان داد. از جمله نتایج جالب توجه بدست آمده، کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق بیضوی به ازای افزایش نسبت قطرهای آن و فاصله گرفتن هندسه ورق از حالت دایری می‌باشد. همچنین، دیده شد که فرکانس‌های طبیعی ورق به ازای افزایش شاخص گرادیان، کاهش می‌یابند که این موضوع به دلیل کاهش مقدار متوسط سفتی ورق در این حالت می‌باشد. همچنین، شکل مودهای مختلف ورق FG که از محاسبه بردارهای ویژه متناظر با هر فرکانس طبیعی حاصل شد، برای شرایط مرزی مختلف ارائه شد.

کلید واژگان

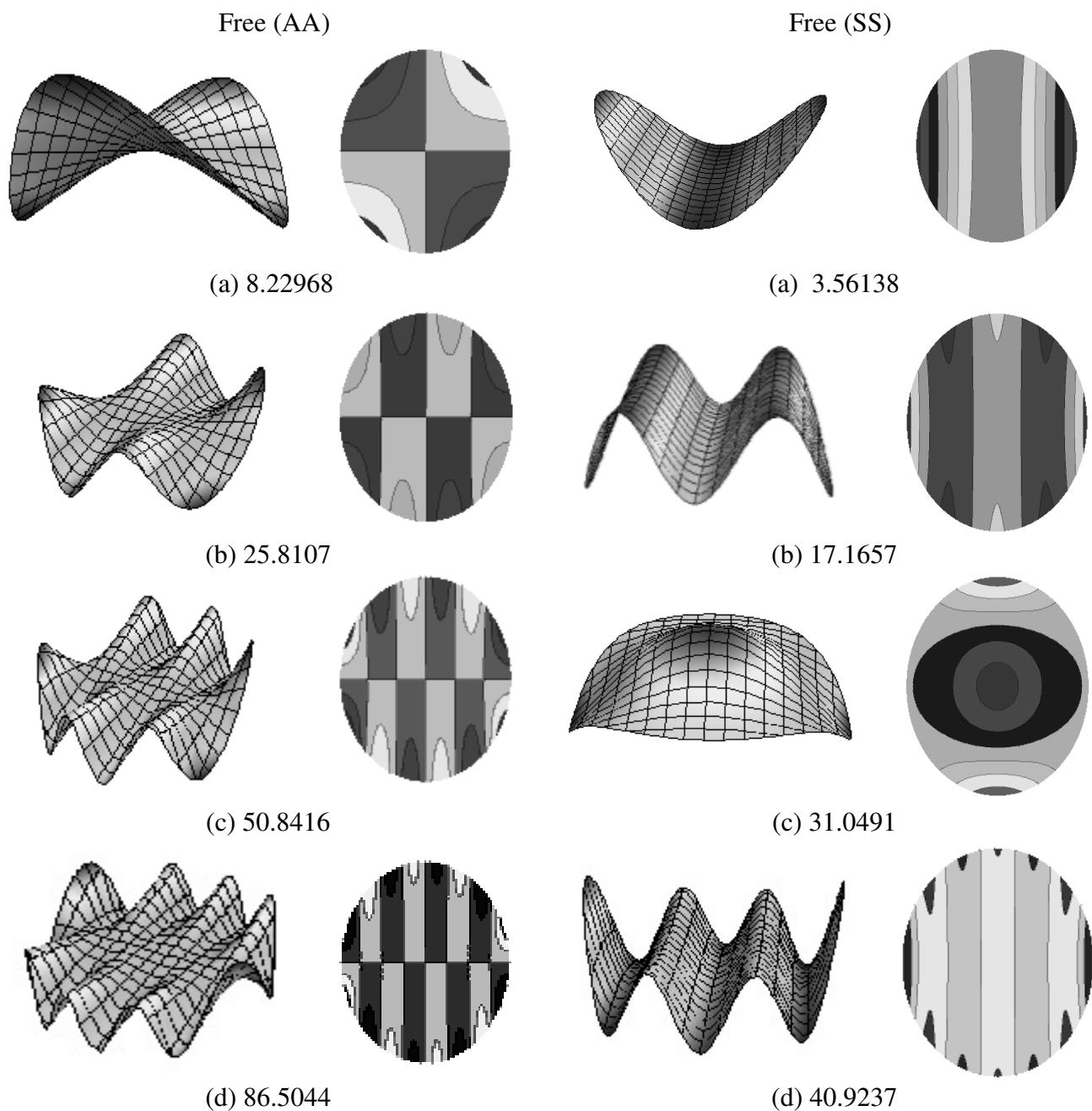
- 1-Functionally Graded Material
- 2-Heating, Ventilation and Air Conditioning
- 3-Abrate
- 4-Yang and Shen
- 5-Allahverdizadeh et al.
- 6-Hosseini-Hashemi
- 7-Differential Quadrature Method
- 8-Leissa
- 9-Sing and Tyagi
- 10-Beres
- 11-Ceribasi and Altay
- 12-Praveen and Reddy
- 13-Jafari Mehrabadi et al.
- 14-Singh and Chakraverty

در پایان، به منظور آن‌که درک بهتر و تصویر روشن‌تری نسبت به نحوه ارتعاش ورق‌های بیضوی و همچنین مودهای ارتعاشی متقارن- متقارن، پادمتقارن- پادمتقارن، متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- متقارن حاصل شود تعدادی از شکل مودهای ورق بیضوی FGM ترسیم شده است. بدین منظور، بردارهای ویژه متناظر با هر فرکانس طبیعی محاسبه شده است. این کار، با استفاده از یک کامپیوتری که در نرمافزار MATHEMATICA توسعه داده شده، انجام شده است.

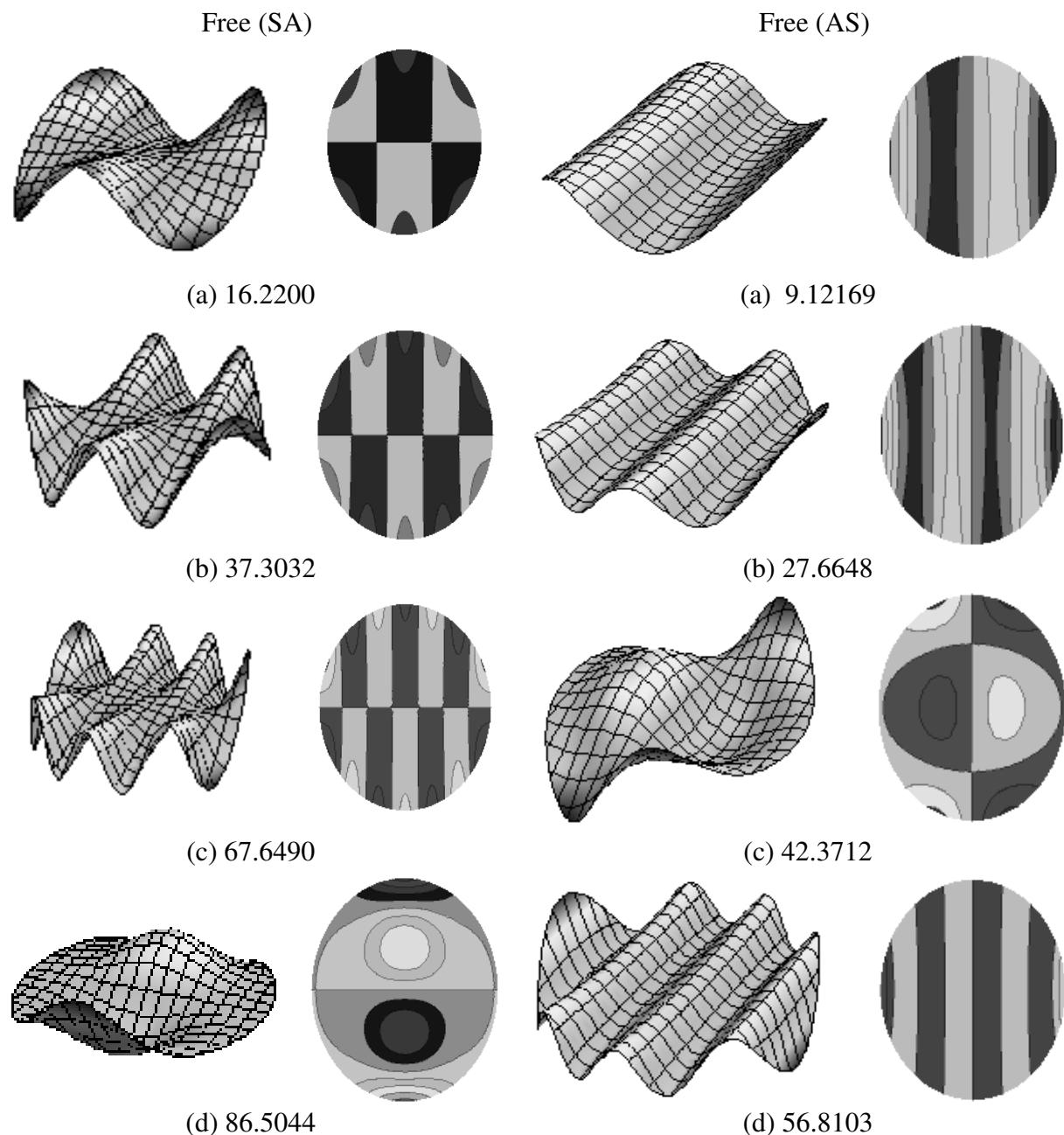
شکل مودهای مربوط به ورق FG با لبه آزاد که دارای شعاع کوچک، شعاع بزرگ و ضخامت ۱، ۳ و ۰/۰۲ متر می‌باشد، در شکل ۴ نشان داده شده است. در تمامی این موارد شاخص گرادیان برابر با یک می‌باشد. لازم به ذکر است که مقدار فرکانس طبیعی متناظر با هر شکل مود بر حسب هرتز (Hz) در زیر آن آورده شده است. همچنین، به منظور بررسی تاثیر شرایط مرزی بر رفتار ارتعاشی ورق‌های بیضوی، تعدادی شکل مود متناظر با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و لبه گیردار، به ترتیب، در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده است.

۵- نتیجه‌گیری

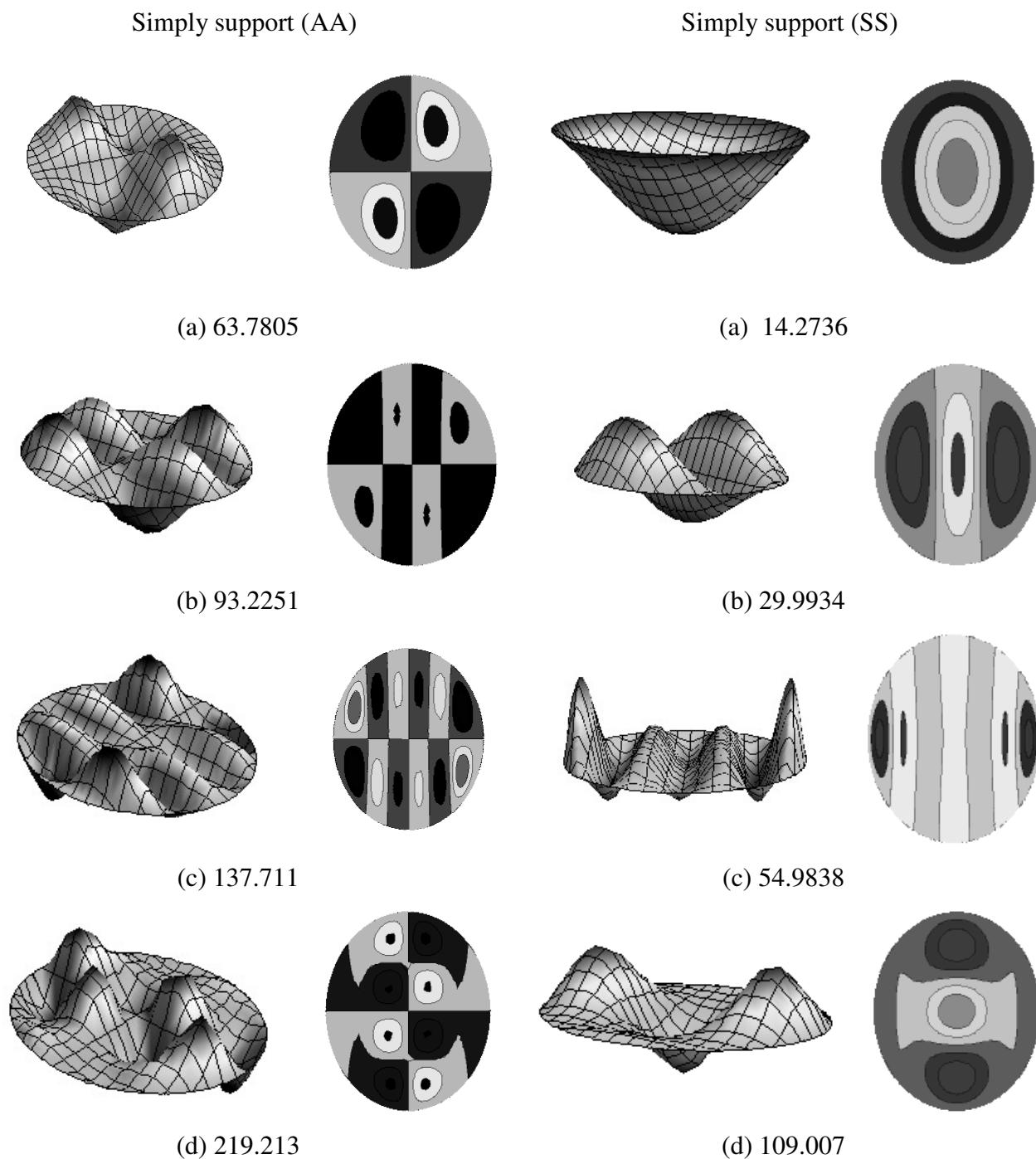
در مقاله حاضر، یک تحلیل ارتعاشات آزاد بر اساس تئوری کلاسیک ورق و روش چند جمله‌ای- ریتز برای ورق‌های بیضوی FG با شرایط مرزی مختلف شامل لبه گیردار، آزاد و تکیه‌گاه ساده ارائه شد و مقادیر متنوعی از فرکانس‌های طبیعی با دقت بالا محاسبه و ارائه



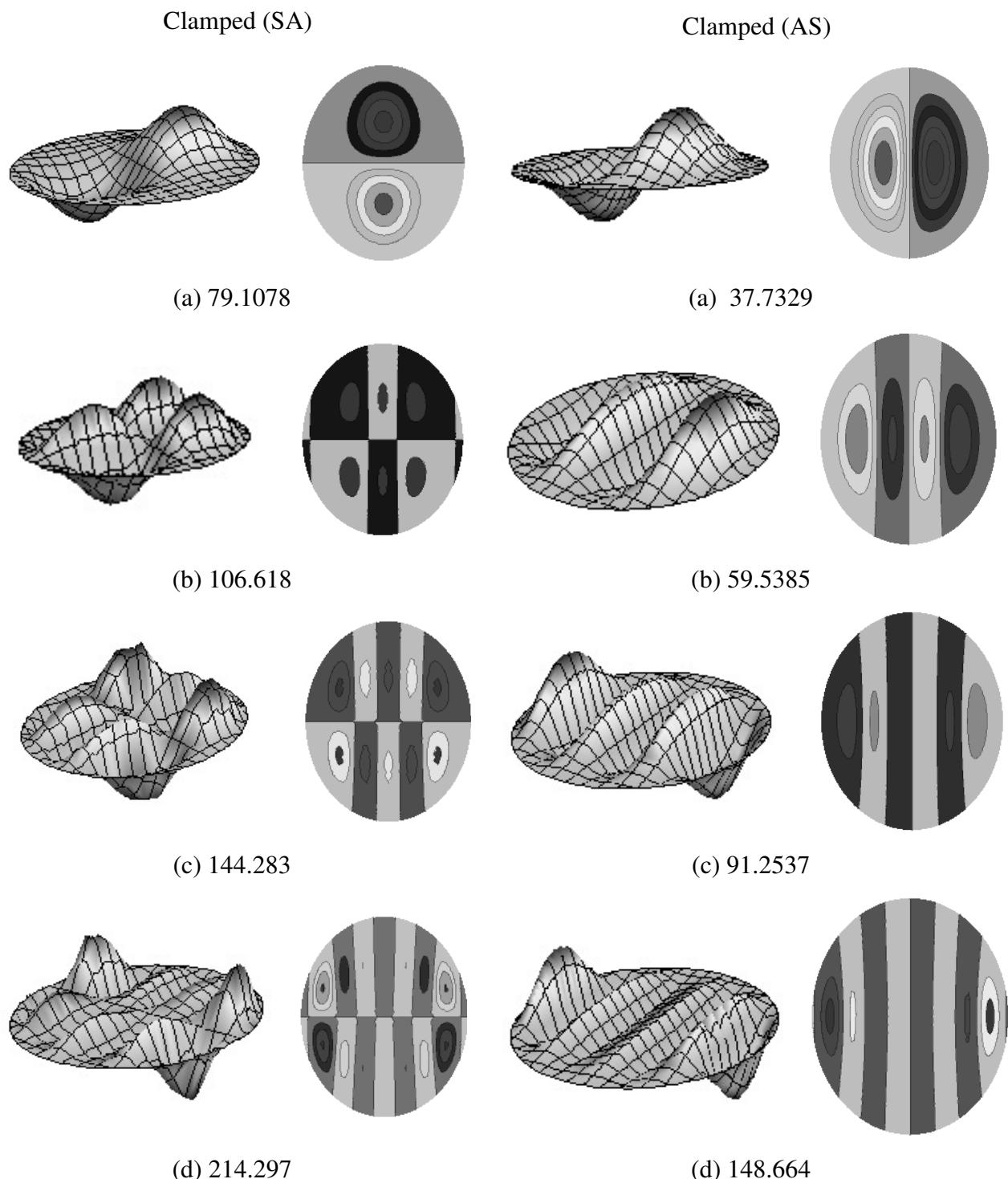
شکل ۴-الف- شکل مودهای متقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه آزاد



شکل ۴-ب- شکل مودهای متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- متقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه آزاد



شکل ۵- شکل مودهای متقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه تکیه‌گاهی ساده



شکل ۶- شکل مودهای متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- متقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه گیردار

- 12-Sing, B. and Tyagi, D.K., (1985), Transverse vibration of an elliptic plate with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 99, p. 379-39.
- 13-Beres, D.P., (1974), Vibration analysis of a completely free elliptical plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, p. 441-443.
- 14-Ceribasi, S. and Altay, G., (2009), Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, p. 668-680.
- 15-Praveen, G.N. and Reddy, J.N., (1998), Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International journal of solids and structures*, Vol. 35, p. 4457-4476.
- 16-Javaheri, R. and Eslami, M.R., (2002), Buckling of Functionally Graded Plates under in-Plane Compressive Loading, *ZAMM*, Vol. 82, p. 277-283.
- 17-Vel S.S. and Batra R.C., (2004), Three-Dimensional Exact Solution for the Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, p. 703-73.
- 18-Cheng, Z.Q. and Batra, R.C., (2000), Three-Dimensional Thermoelastic Deformations of a Functionally Graded Elliptic Plate, *Composites Part B*, Vol. 31, p. 97-106.
- 19-Woo, J. and Meguid, S.A., (2001), Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, p. 7409-7421.
- 20-Hongjun, X., Zhifei, S. and Taotao, Z., (2006), Elastic Analyses of Heterogeneous Hollow Cylinders, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, p. 681-691.
- 21-Hosseini-Hashemi, Sh., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., (2011), A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, p. 11-22.
- 22-Hosseini-Hashemi, Sh., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., (2011), Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure, *Composite Structures*, Vol. 93, p. 722-735.

- مراجع

- 1-Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota, I., (1990), Editors In: *Proceedings of First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai, Japan.
- 2-Koizumi, M., (1993), The concept of FGM, *Ceramic Transactions: Functionally Gradient Materials*, Vol. 34, p. 3-10.
- 3-Abbate, S., (2008), Functionally graded plates behave like homogeneous plates, *Composites Part B-Eng.*, Vol. 39, p. 151-158.
- 4-Yang, J. and Shen, H.S., (2001), Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates, *Composite Structures*, Vol. 54, p. 497-508.
- 5-Shen, H.S., (2002), Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, p. 561-584.
- 6-Yang, J. and Shen, H.S., (2003), Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites Part B: Eng.*, Vol. 34, p. 103-115.
- 7-Allahverdizadeh, A., Naei, M.H. and Bahrami, M.N., (2008), Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, p. 966-984.
- 8-Hosseini-Hashemi, Sh., Akhavan, H., Rokni Damavandi Taher, H., Daemi, N. and Alibegloo, A., (2010), Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation, *Materials and Design*, Vol. 31, p. 1871-1880.
- 9-Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H. and Akhavan, H., (2010), Vibration analysis of radially FGM sectorial plates of variable thickness on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 92, p. 1734-1743.
- 10-A.W., Leissa, (1969), Vibration of plates, NASA SP-160.
- 11-A.W., Leissa, (1967), Vibration of a simply-supported elliptic plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, p. 145-148.

- 24-Singh, B. and Chakraverty, S., (1992), Transverse vibration of simply supported elliptical and circular plates using boundary characteristic orthogonal polynomials in two variables, Journal of Sound and Vibration, Vol. 152, p. 149-155.
- 23-Jafari Mehrabadi, S., Kargarnovin, M.H. and Najafizadeh, M.M., (2009), Free vibration analysis of functionally graded coupled circular plate with piezoelectric layers, Mechanical Science and Technology, Vol. 23, p. 2008-2021.