تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی ساخته شده از مواد FGM

شاهرخ حسینی هاشمی[۱]، سید رسول آتشی‌پور[۲*]، محمود کریمی[۳]، مهدی اسحاقی[۴]

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران
۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران
۳- کارشناس ارشد، شرکت مهندسی و ساخت توربین مپنا (توگا)
۴- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کنکوردیا

چکیده

در این مقاله، یک تحلیل ارتعاشات آزاد برای ورق‌های بیضوی ساخته شده از مواد هدفمند FGM با شرایط مرزی مختلف بر پایه روش چند جمله‌ای- ریتز و تئوری کلاسیک ورق ارائه شده است. تابع پذیرفتنی پیشنهاد شده علاوه بر دقت بالا برای فرکانس‌های طبیعی بدست آمده دارای این قابلیت است که برای شرایط مرزی متنوع کلاسیک، یعنی لبه گیردار، لبه آزاد و تکیه گاه ساده مورد استفاده قرار گیرد. فرض شده است که خواص مکانیکی ورق FGM بصورت پیوسته و براساس یک قانون تابع توانی از کسر حجمی مواد سازنده در راستای ضخامت تغییر می‌کند. همگرایی روش چند جمله‌ای- ریتز اعمال شده مورد بررسی قرار گرفته است و صحت حل ارائه شده با انجام یک مقایسه جامع با نتایج حاصل از مطالعات موجود در منابع برای ورق بیضوی همگن و ورق دایروی FGM بررسی شده است. ضمن آنکه مقایسه نتایج حاصل از تحلیل حاضر با نتایج المان محدود، صحت حل انجام شده برای ورق‌های بیضوی FGM را تایید می‌کند. در پایان اثر هندسه ورق و پارامتر غیر همگنی خواص بر فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار گرفته است و شکل مودهای مربوط به حالات متقارن- متقارن، متقارن- پادمتقارن، پادمتقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: ورق بیضوی، مواد هدفمند FGM، فرکانس طبیعی، روش چند جمله‌ای- ریتز

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Elliptical Plates

Sh. Hosseini Hashemi[1], S.R. Atashipour[2], M. Karimi[3], M. Es'haghi[4]

1- Professor, School of Mechanical Eng., Iran University of Science and Technology
2- PhD Candidate, School of Mechanical Eng., Iran Univ. of Science and Technology
3- MSc in Mechanical Eng., MAPNA Turbine Eng. and Manufacturing Co. (TUGA)
4- PhD student, Department of Mechanical Engineering, Concordia University

Abstract

This paper deals with a free vibration analysis of functionally graded elliptical plates with different classical boundary conditions on the basis of polynomial-Ritz method and classical plate theory. The proposed admissible function is capable to obtain accurate natural frequencies of various classical boundary conditions namely, clamped, free and simply supported edges. The mechanical properties of the FG plate are assumed to vary continuously through the thickness of the plate and obey a power law distribution of the volume fraction of the constituents. The convergency of applied polynomial-Ritz method is investigated. In order to verify the accuracy of the present solution, a comprehensive comparison study is performed

* نویسنده مسئول مقاله atashipour@iust.ac.ir

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

with the available results in the literature for homogeneous elliptical plate and FG circular plate. Also, the numerical results of the present solution for FG elliptical plate are compared with those of the finite element method (FEM). Finally, the effects of the plate geometry and inhomogeneity on the natural frequencies are investigated and some vibrational mode shapes related to symmetric-symmetric, symmetric-antisymmetric, antisymmetric- symmetric and antisymmetric- antisymmetric states are presented.
Keywords: Elliptical plate, Functionally Graded Materials, Natural Frequency, polynomial-Ritz method

۱- مقدمه

مواد هدفمند FGM[۱] نسل جدیدی از مواد مرکب می‌باشند که اولین بار توسط دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ معرفی شده‌اند [۱و۲]. خواص مواد FGM بطور پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کند. این خصوصیت باعث می‌گردد که مشکل ناپیوستگی تنش در مواد مرکب لایه‌ای بر طرف شده و توزیع تنش یکنواخت شود. یکی دیگر از مزایای مواد FGM مقاومت بالای آنها در مقابل دماهای بسیار زیاد است که موجب بهره‌گیری از این مواد به عنوان سپر حرارتی می‌شود. معمولا، مواد FGM از دو جنس متفاوت مثل سرامیک و فلز ساخته می‌شوند تا همزمان خواص عالی مکانیکی و حرارتی را داشته باشد. با توجه به ویژگی-های منحصر به فرد مواد FGM، هر روز بر دامنه کاربردهای این مواد در صنایع مختلف مهندسی نظیر کشتی‌سازی افزوده می‌شود. به عنوان نمونه در سال-های اخیر، استفاده از ورق‌های FGM برای ساخت مبدل‌های حرارتی در سیستم‌های تهویه مطبوع (HVAC[۲]) فشار بالا ویژه‌ی صنایع کشتی‌سازی، مورد توجه شرکت‌های سازنده معتبر بین‌المللی قرار گرفته است.

در دهه گذشته، محققان زیادی به مطالعه دینامیک و ارتعاشات ورق‌های FGM پرداخته‌اند که دلیل عمده آن کاربرد مطالعات مذکور در طراحی مناسب این سازه‌ها برای جلوگیری از شکست و تخریب آنها در مقابل پدیده‌های نظیر خستگی، تشدید و تنش‌های سنگین دینامیکی می‌باشد. اکثر کارهای صورت گرفته بر روی ورق‌های نازک و با روش‌های نیمه تحلیلی و عددی بوده است. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک مستطیلی FG با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار توسط آبریت[۳] [۳] صورت پذیرفته است. بر اساس یک روش تحلیلی، یانگ و شن[۴] [۴] ارتعاشات آزاد و گذرای ورق‌های نازک FGM مستقر بر روی بستر الاستیک، تحت تنش اولیه‌ی صفحه‌ای و بار خارج صفحه‌ای را بررسی کردند. همچنین شن [۵] و یانگ و شن [۶] با استفاده از تئوری ورق نازک و روش اختلالات، مسئله‌ی جابجایی‌های بزرگ و پسا کمانش یک ورق FGM تحت بار حرارتی را تحلیل نمودند. اللهوردی زاده و همکارانش[۵] [۷] با بکارگیری یک روش نیمه تحلیلی، ارتعاشات غیر خطی نامتقارن ورق‌های دایروی نازک FGM را مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعاتی که به تازگی صورت پذیرفته است حسینی هاشمی و همکارانش[۶] ارتعاشات و کمانش ورق‌های نازک دایروی، حلقوی و قطاع دایروی FGM بر روی بستر الاستیک را با استفاده از روش حداقل تفاضل مربعات (DQM[۷]) مورد بررسی قرار داده‌اند [۸و۹].

در بسیاری از موارد تحلیل و طراحی ورق‌هایی با اشکال هندسی خاص و بدست آوردن اطلاعاتی پیرامون فرکانس‌های اساسی آن‌ها مورد توجه محققان بوده است. با وجود آنکه اطلاعات جامعی در مورد ارتعاشات ورق‌های دایروی و مستطیلی موجود می‌باشد اما ارتعاشات ورق‌های بیضوی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. این نوع ورق‌ها دارای کاربردهای صنعتی قابل توجهی هستند که از آن جمله می‌توان به صفحه پایه در قایق‌های بادبانی، صفحه بکسل یدک‌کش‌ها و ورق-های بکار گرفته شده در مبدل‌های حرارتی ویژه صنایع کشتی‌سازی اشاره نمود. لیسا[۸] [۱۰و۱۱] اطلاعات کاملی را پیرامون ورق‌های بیضوی با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد ارائه نمود و فرکانس های اساسی ورق‌های بیضوی با لبه ساده را بدست آورد. پس از آن، مطالعات دیگری در زمینه تحلیل ارتعاشات این ورق‌ها صورت پذیرفت که از نمونه‌های آن می‌توان به کار

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

سینگ و تیاگی[9] [۱۲] برای بررسی ارتعاشات عرضی ورق گیردار بیضوی اشاره نمود. وی در تحلیل خود فرض نمود که جابجایی‌ها مشابه با ارتعاشات متقارن محوری در ورق‌های دایروی باشند. پس از آن چندین کار در زمینه بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی با شرط مرزی آزاد صورت پذیرفت. به عنوان مثال برس[10] [۱۳] با بکارگیری روش ریتز توانست فرکانس‌های ورق آزاد بیضوی را بدست آورد. از جمله مطالعاتی که اخیرا بر روی ورق‌های بیضوی انجام شده است می‌توان به کار سریباسی و آلتای[11] [۱۴] برای بررسی ارتعاشات این سازه‌ها با ضخامت ثابت و متغیر با استفاده از روش ریتز اشاره نمود.

اگرچه مطالعات محدودی در زمینه ارتعاشات آزاد ورق-های بیضوی همگن در منابع یافت می‌شود، اما کمتر به بررسی ارتعاشات ورق‌های بیضوی ساخته شده از مواد هدفمند FG پرداخته شده است. از این رو، در این پژوهش، با بهره‌گیری از روش چند جمله‌ای- ریتز و یک تابع پذیرفتنی مناسب، ارتعاشات آزاد ورق‌های بیضوی FG مورد مطالعه قرار گرفته است و فرکانس-های طبیعی و شکل مودهای مربوط به این ورق‌ها بدست آمده است. پس از ارزیابی همگرایی روش و صحت حل ارائه شده، تاثیر پارامترهای مهم مساله بررسی شده است و شکل مودهای مربوط به حالات متقارن- متقارن، متقارن- پادمتقارن، پادمتقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن ارائه شده است.

۲- مواد هدفمند FGM

امروزه مواد FGM دارای فرایند ساخت راحتی می-باشند و نحوه تغییر خواص در آنها را به سادگی می‌توان کنترل نمود. از این رو می‌توان با طراحی مناسب، بهترین الگوی تغییرات خواص را برای حصول عملکرد مناسب سازه جهت ساخت آن معرفی نمود. تاکنون مدل‌های مختلفی برای بیان نحوه توزیع و تغییر خواص مواد FG ارائه شده است. یکی از مهمترین مدل‌های معرفی شده توسط محققان، مدل ساده توانی می‌باشد. چنانچه ماده FG از ترکیب سرامیک و فلز ساخته شده باشد آنگاه خواهیم داشت

$$V_m + V_c = 1 \qquad (۱)$$

که در آن V_c و V_m به ترتیب کسر حجمی قسمت سرامیکی و فلزی سازه می‌باشند. براساس توزیع قاعده توانی که به‌وسیله پراوین و ردی[12] [۱۵] ارائه شده است، پارامتر تغییرات کسر حجمی سرامیک در راستای ضخامت به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$V_c = (\frac{z}{h} + \frac{1}{2})^g, \quad g \geq 0 \qquad (۲)$$

که در آن z مختصه راستای ضخامت ورق بوده و h ضخامت آن می‌باشد. همچنین، g شاخص گرادیان است که مقادیر بزرگتر و یا مساوی صفر را به خود می-گیرد. تمامی خواص مکانیکی ورق FGM نظیر چگالی و مدول الاستیسیته بر اساس این پارامتر تغییر و تعریف می‌گردند. همچنین ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که به دلیل محدوده کوچک تغییرات نسبت پواسون و تاثیر ناچیز این تغییرات بر پاسخ مساله، اغلب مطالعات انجام شده در راستای تحلیل مسائل ورق‌های FGM، مقدار ثابتی را برای این پارامتر در نظر گرفته‌اند (به عنوان نمونه مراجع [۱۶-۲۲] را ببینید). بر این اساس، پارامترهای ورق FG به صورت زیر تعریف می‌شوند

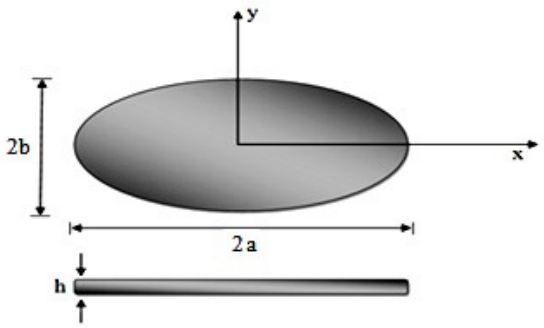
$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m \\ \nu(z) &= \nu \end{aligned} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا شاخص m و c به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌نمایند. رابطه بالا یک قاعده ساده می‌باشد که با استفاده از آن می‌توان خواص ورقی که دارای اجزای سرامیکی و فلزی است را بدست آورد. هنگامیکه $g = 0$ آنگاه ورق همگنی از جنس سرامیک خواهیم داشت و با افزایش شاخص گرادیان، خواص فلزی افزایش می‌یابند. در حالتی که شاخص گرادیان برابر واحد است خواص مواد به صورت خطی در راستای ضخامت ورق تغییر می‌نماید.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

۳- تحلیل ریتز برای ارتعاشات ورق بیضوی FGM

مطابق شکل زیر، ورق FGM بیضوی نازکی را در نظر بگیرید که دارای شعاع بزرگ a، شعاع کوچک b و ضخامت h می‌باشد.



شکل ۱- نمایی از یک ورق بیضوی

براساس تئوری کلاسیک ورق، میدان جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= -z\frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= -z\frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w(x,y,t) \end{aligned} \qquad (۴)$$

اولین قدم در حل ریتز یافتن یک تابع پذیرفتنی مناسب می‌باشد، به نحوی که موجب دستیابی به یک حل ساده و در عین حال دقیق شود. با در نظر داشتن معادله تابع بیضی، یک تابع آزمایشی برای تخمین جابجایی صفحه میانی ورق را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت

$$W = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\alpha_1\frac{x^2}{a^2}+\alpha_2\frac{y^2}{b^2}+\alpha_3\right) \qquad (۵)$$

در رابطه بالا α_1، α_2 و α_3 سه ضریب مجهول می‌باشند. لیسا [۱۰] از این تابع شکل برای بدست آوردن فرکانس‌های یک ورق بیضوی با شرایط مرزی ساده استفاده نمود و برای بسیاری از نسبت ضخامت‌ها و ضرایب پواسون مختلف جواب‌های مناسبی را استخراج نمود. این تابع تغییر شکل دارای توانایی تشکیل تقارن دوگانه است که برای بدست آوردن فرکانس های اساسی ورق لازم می‌باشد. اگرچه این تابع جوابهای دقیقی را برای فرکانس اول ورق نتیجه می‌دهد اما توانایی استخراج فرکانس‌های دقیق در مودهای ارتعاشی بالاتر را دارا نمی‌باشد. بنابراین نیاز است که از یک تابع پذیرفتنی مناسب‌تر استفاده کرد، به نحوی که بتوان با بهره‌گیری از آن فرکانس‌های دقیقی را برای مودهای ارتعاشی مختلف ورق FG بدست آورد و علاوه بر آن، برای شرایط مرزی مختلف قابل استفاده باشد. یک تابع آزمایشی مناسب که همه ویژگی‌های ذکر شده را دارا باشد، به صورت زیر است

$$W = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^k \sum_{i=0}^{N_i}\sum_{j=0}^{N_j}\alpha_{ij}x^i y^j \qquad (۶)$$

در رابطه بالا α_{ij} ضرایب مجهول می‌باشند و k نیز ضریب ثابتی است که برای ارضای شرایط مرزی مختلف بکار گرفته می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\begin{aligned} &k=0 && \text{: شرط مرزی لبه آزاد} \\ &k=1 && \text{: شرط مرزی تکیه‌گاه ساده} \\ &k=2 && \text{: شرط مرزی لبه گیردار} \end{aligned} \qquad (۷)$$

به منظور حل ریتز لازم است که انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ورق محاسبه شوند. انرژی پتانسیل کرنشی برای یک ورق نازک بیضوی به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$V = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \qquad (۸)$$

در رابطه بالا ε_x، ε_y و γ_{xy} مولفه‌های کرنش هستند که از جایگذاری مولفه‌های میدان تغییر مکان در روابط کرنش-تغییر مکان خطی به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \qquad (۹)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

برای یافتن رابطه مولفه‌های تنش از روابط تنش-کرنش هوک در حالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad (۱۰)$$
$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

انرژی جنبشی برای ورق‌های نازک نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)(\dot{w})^2\,dx\,dy\,dz \qquad (۱۱)$$

علامت نقطه بالای w به معنای مشتق نسبت به زمان می‌باشد. با استفاده از رابطه بالا می‌توان انرژی جنبشی را برحسب جابجایی عرضی ورق بدست آورد. برای حل ارتعاشات آزاد، تابع جابجایی عرضی ورق به شکل زیر تعریف می‌شود

$$w(x,y,t) = W(x,y)\sin(\omega t) \qquad (۱۲)$$

در رابطه بالا W تابع آزمایشی بوده و ω فرکانس طبیعی ورق را نشان می‌دهد. از جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۱۱) می‌توان انرژی جنبشی را محاسبه کرد. بنابراین، مقدار بیشینه انرژی جنبشی به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$T_{Max} = \frac{\omega^2}{2}\iiint_V \rho(z)W^2\,dV \qquad (۱۳)$$

از جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه بالا و ساده‌سازی به مقدار بیشینه انرژی جنبشی در ورق‌های FG بر اساس مدل پراوین-ردی به شکل زیر می‌رسیم:

$$T_{Max} = \frac{1}{2}h\omega^2\left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{g+1}\right)\iint_A W^2\,dA \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۸) به سادگی می‌توان نشان داد که مقدار بیشینه انرژی پتانسیل چنین خواهد بود

$$V_{Max} = \iiint_V \frac{z^2E(z)}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dV\right] \qquad (۱۵)$$

رابطه بالا برای ورق‌های FG براساس مدل پراوین-ردی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$V_{Max} = \frac{h^3}{4(1-\nu^2)}\left(\frac{(g^2+g+2)(E_c-E_m)}{(g+1)(g+2)(g+3)} + \frac{1}{3}E_m\right)\iint_A\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dA \qquad (۱۶)$$

به منظور بکارگیری روش ریتز از تابع لاگرانژین به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\Pi = V_{Max} - T_{Max} \qquad (۱۷)$$

به منظور دستیابی به حل ریتز لازم است آن دسته از توابع پذیرفتنی بدست آیند که به ازای آنها انرژی مکانیکی ورق کمینه شود، یعنی

$$\delta\Pi = \Pi(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w) - \Pi(u,v,w) = 0 \qquad (۱۸)$$

همانطور که قبلا ذکر شد، تابع آزمایشی را به صورت رابطه (۶) در نظر می‌گیریم. در این رابطه تنها ضرایب α_{ij} مجهول می‌باشد. چنانچه مرتبه چند جمله‌ای در تابع آزمایشی $N_i + N_j$ باشد، آنگاه از رابطه بالا خواهیم داشت

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_{00}}\delta\alpha_{00} + \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_{01}}\delta\alpha_{01} + \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_{10}}\delta\alpha_{10} + \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_{N_iN_j}}\delta\alpha_{N_iN_j} = 0 \qquad (۱۹)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

از رابطه بالا، تعداد $(N_i+1)(N_j+1)$ معادله مستقل زیر برحسب ظرایب α_{ij} بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{00}}=0,\ \ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{01}}=0,\ \ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{10}}=0,\ \ ...,\ \ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{N_iN_j}}=0 \qquad (۲۰)$$

معادلات بالا دارای جواب بدیهی صفر هستند. جواب غیر بدیهی معادلات بالا که از صفر قرار دادن دترمینان ضرایب بدست می‌آید، همان معادله مشخصه ورق است که در برگیرنده فرکانس‌های طبیعی آن می‌باشد. مسلما با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای رابطه (۶)، تعداد معادلات تشکیل دهنده مساله مقادیر ویژه افزایش یافته و نتیجتا به تعداد بیشتری از بی‌نهایت فرکانس طبیعی ورق دست خواهیم یافت، ضمن اینکه دقت فرکانس-های حاصله نیز افزایش می‌یابد. متناظر با هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه برای ضرایب مجهول α_{ij} وجود دارد. با جایگذاری مولفه‌های هر یک از بردارهای ویژه مذکور در معادله (۶)، شکل مود متناظر با آن فرکانس طبیعی (مقدار ویژه) بدست می‌آید.

۴- بحث و بررسی نتایج عددی

بر اساس تئوری کلاسیک ورق و با استفاده از روش ریتز تشریح شده در قسمت قبل، یک کد کامپیوتری در نرم‌افزار MATHEMATICA توسعه داده شده است که با استفاده از آن می‌توان فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق بیضوی FGM را با شرایط مرزی مختلف بدست آورد. به منظور بررسی نتایج عددی حاصل از پژوهش حاضر، از خواص دو نوع ماده FG استفاده شده است که عبارتند از آلومینیوم- آلومینا و فولاد- نیکل. برای سهولت این دو نوع ماده را به ترتیب با FGM1 و FGM2 نشان می‌دهیم. خواص مکانیکی مربوط به این مواد FG در جدول ۱ ارائه شده است.

به منظور نشان دادن نحوه تغییرات خواص مکانیکی ورق FG در راستای ضخامت، تغییرات مدول الاستیسیته ماده FGM1 و FGM2 به ازای مقادیر مختلف شاخص گرادیان ترسیم و در شکل ۲ ارائه شده است.

در این پژوهش، برای ارائه نتایج عددی کلی‌تر، فرکانس‌های ورق به صورت بدون بعد آورده شده است که چنین تعریف می‌گردد

$$\lambda^2=\omega b^2\sqrt{\rho_m h/D} \qquad (۲۱)$$

در رابطه مذکور ρ_m و D به‌ترتیب چگالی فلز و سفتی (صلبیت) خمشی ورق همگن می‌باشند. لازم به ذکر است که سفتی خمشی ورق همگن با رابطه زیر تعریف می‌شود

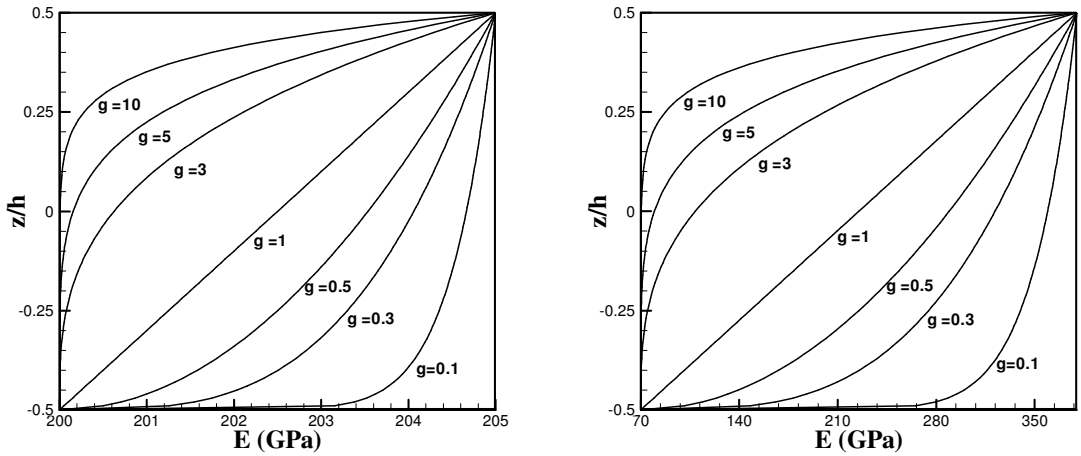
$$D=\frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۲۲)$$

همچنین، نسبت پواسون بجز مواردی که مقدار آن در جدول مشخص شده است، در سایر موارد برابر با ۰/۳ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد FG آلومینیوم- آلومینا و فولاد- نیکل

نوع ماده	$\rho_c\ (kg/m^3)$	$E_c\ (Gpa)$	$\rho_m\ (kg/m^3)$	$E_m\ (Gpa)$
FGM1	آلومینا (Al_2O_3)		آلومینیوم (Al)	
	۳۸۰۰	۳۸۰	۲۷۰۰	۷۰
FGM2	نیکل (Ni)		فولاد (St)	
	۸۹۰۰	۲۰۵	۷۸۰۰	۲۰۰

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]



(ب) (الف)

شکل ۲- تغییرات مدول الاستیسیته در راستای ضخامت: (الف): ورق FGM1، (ب): ورق FGM2

یکی از معیارهای نشان‌دهنده صحت روش ریتز آن است که با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای تابع پذیرفتنی، مقادیر عددی حاصل از حل غیر بدیهی مساله به سمت اعداد مشخصی همگرا شوند که همان فرکانس‌های طبیعی ورق هستند. بدین منظور، در جدول ۲ همگرایی مذکور برای یک ورق بیضوی FGM2 با شرط مرزی آزاد بررسی شده است. در این جدول سه فرکانس طبیعی اول ورق بیضوی با شعاع کوچک ۱، شعاع بزرگ ۳ و ضخامت ۰/۰۲ متر آورده شده است. شاخص گرادیان در این حالت برابر با واحد در نظر گرفته شده است. مقادیر عددی این جدول به خوبی همگرایی حل ارائه شده را با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای (N_i و N_j) نشان می‌دهد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که نباید افزایش زمان اجرای برنامه کامپیوتری برای تعداد زیاد N_i و N_j را دور از نظر داشت.

اختصار SA، AS، SS و AA به‌ترتیب نشان‌دهنده مودهای متقارن- پادمتقارن، پادمتقارن-متقارن، متقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن می‌باشند. تقارن‌های مذکور نسبت به محورهای کوچک و بزرگ بیضی می‌باشد.

جدول ۲- بررسی همگرایی فرکانس‌های طبیعی برحسب هرتز (Hz) برای یک ورق بیضوی FG

نوع مود	$N_i \times N_j$	ω_1	ω_2	ω_3
SS	۲×۲	۳/۹۷۱۷۴	۳۶/۲۵۴۵	۷۷/۸۳۳۱
	۳×۳	۳/۵۷۷۷۶	۲۵/۱۱۴۵	۳۱/۵۱۵۵
	۴×۴	۳/۵۶۱۴۰	۱۷/۸۸۶۷	۳۱/۰۵۴۱
	۵×۵	۳/۵۶۱۳۸	۱۷/۱۸۲۲	۳۱/۰۴۹۳
	۶×۶	۳/۵۶۱۳۸	۱۷/۱۶۵۷	۳۱/۰۴۹۱
	۷×۷	۳/۵۶۱۳۸	۱۷/۱۶۵۰	۳۱/۰۴۹۱
AA	۲×۲	۸/۲۷۳۶۳	۳۷/۱۸۵۵	۱۳۰/۵۷۷
	۳×۳	۸/۲۲۹۹۵	۲۷/۰۰۷۳	۸۱/۴۸۵۴
	۴×۴	۸/۲۲۹۶۹	۲۵/۸۶۰۳	۵۶/۷۰۰۶
	۵×۵	۸/۲۲۹۶۸	۲۵/۸۱۱۶	۵۱/۳۵۷۴
	۶×۶	۸/۲۲۹۶۸	۲۵/۸۱۰۷	۵۰/۸۴۱۶
	۷×۷	۸/۲۲۹۶۸	۲۵/۸۱۰۶	۵۰/۸۳۹۸
SA	۲×۲	۴۶۱۹/۲۰	۱۱۳/۵۵۹	۱۷۲/۳۴۷
	۳×۳	۱۶/۵۴۸۱	۵۸/۵۹۰۷	۸۳/۴۵۶۱
	۴×۴	۱۶/۲۲۷۱	۴۰/۲۷۳۵	۸۰/۳۱۷۶
	۵×۵	۱۶/۲۲۰۱	۳۷/۴۹۱۲	۷۶/۲۰۱۹
	۶×۶	۱۶/۲۲۰۰	۳۷/۳۰۳۲	۶۷/۶۴۹۰
	۷×۷	۱۶/۲۲۰۰	۳۷/۲۹۵۳	۶۷/۵۲۳۴
AS	۲×۲	۱۱/۷۱۸۲	۴۹/۰۲۴۰	۱۰۸/۹۶۰
	۳×۳	۹/۲۸۵۶۵	۴۰/۹۴۶۲	۴۷/۱۵۷۵
	۴×۴	۹/۱۲۳۰۹	۲۹/۷۴۰۵	۴۲/۴۲۴۶
	۵×۵	۹/۱۲۱۶۹	۲۷/۷۵۵۳	۴۲/۳۷۳۶
	۶×۶	۹/۱۲۱۶۹	۲۷/۶۶۴۸	۴۲/۳۷۱۲
	۷×۷	۹/۱۲۱۶۹	۲۷/۶۶۲۳	۴۲/۳۷۱۱

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

به منظور حصول اطمینان از صحت حل صورت پذیرفته، در جداول ۳ و ۴ یکسری مقایسه بین نتایج عددی مربوط به پژوهش حاضر و مطالعه تحلیلی جعفری مهرآبادی و همکاران[۱۳] [۲۳] برای ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک دایروی FG انجام شده است. بدین منظور شعاع‌های کوچک و بزرگ بیضی مساوی با یکدیگر و برابر با ۰/۶ متر فرض شده است. لازم به ذکر است که مطالعه مرجع [۲۳] برمبنای روش جداسازی متغیرها برای ورق‌های دایروی انجام شده است.

مقایسه انجام شده در جدول ۳ برای یک ورق دایروی FGM2 است که دارای ضخامت ۰/۰۲ متر با لبه های گیردار می‌باشد. این مقایسه به ازای مقادیر مختلف شاخص گرادیان انجام شده است. علاوه بر این، نتایج مربوط به تحلیل المان محدود که از مدل‌سازی نرم-افزاری توسط همین مرجع انجام شده، ارائه شده است. مقدار n مشخص‌کننده تعداد گره‌های قطری در شکل مود ارتعاشی فرکانس مربوطه می‌باشد.

در جدول ۴ نیز مقایسه‌ای مشابه با جدول ۳ برای ورق FG با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده انجام شده است. در هر دو جدول ۳ و ۴، درصد اختلاف بین نتایج روش حاضر و سایر روش‌ها محاسبه و ارائه شده است. این درصد اختلاف از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\%\text{Diff} = \frac{[(\text{OMs}) - (\text{PM})]}{(\text{OMs})} \times 100 \qquad (۲۲)$$

OMs: سایر روشها

PMs: روش حاضر

در این جداول، 1 Diff% و 2 Diff% به ترتیب نشان-دهنده درصد خطای روش حاضر نسبت به حل تحلیلی و حل المان محدود می‌باشد. همانگونه از جدول ۳ و ۴ مشخص است، همخوانی بسیار عالی بین نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر و نتایج مربوط به مطالعه جعفری مهرآبادی و همکاران [۲۳]، صحت حل انجام شده را تایید می‌کند.

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های ورق دایروی FG برحسب هرتز (Hz) با شرایط مرزی لبه گیردار

g	n	Present	مرجع [۲۳]	FEM [۲۳]	%Diff 1	%Diff 2
۰	۰	۱۳۸/۴۱۳	۱۳۸/۴۱	۱۳۹/۲۹	۰/۰۰	۰/۶۳
	۱	۲۸۸/۲۱۰	۲۸۸/۰۵	۲۸۹/۸۰	-۰/۰۵	۰/۵۵
	۲	۴۷۳/۳۷۲	۴۷۲/۵۵	۴۷۳/۴۸	-۰/۱۷	۰/۰۲
۱	۰	۱۳۴/۶۱۱	۱۳۴/۶۳	۱۳۵/۴۷	۰/۰۱	۰/۶۳
	۱	۲۸۰/۲۹۲	۲۸۰/۱۷	۲۸۱/۸۶	-۰/۰۴	۰/۵۶
	۲	۴۶۰/۳۶۷	۴۵۹/۶۲	۴۶۰/۴۹	-۰/۱۶	۰/۰۳
۳	۰	۱۳۲/۶۹۲.	۱۳۲/۷۰	۱۳۳/۶۸	۰/۰۱	۰/۷۴
	۱	۲۷۶/۲۹۷.	۲۷۶/۱۹	۲۷۸/۱۴	-۰/۰۴	۰/۶۶
	۲	۴۵۳/۸۰۷.	۴۵۳/۰۹	۴۵۴/۴۲	-۰/۱۶	۰/۱۳
۵	۰	۱۳۲/۰۹۷	۱۳۲/۱۲	۱۳۳/۱۱	۰/۰۲	۰/۷۶
	۱	۲۷۵/۰۵۸	۲۷۴/۹۶	۲۷۶/۹۵	-۰/۰۴	۰/۶۸
	۲	۴۵۱/۷۷۱	۴۵۱/۰۶	۴۵۲/۴۷	-۰/۱۶	۰/۱۵
۷	۰	۱۳۱/۸۲۲	۱۳۱/۸۵	۱۳۲/۸۳	۰/۰۲	۰/۷۶
	۱	۲۷۴/۴۸۶	۲۷۴/۳۹	۲۷۶/۳۶	-۰/۰۴	۰/۶۸
	۲	۴۵۰/۸۳۲	۴۵۰/۱۳	۴۵۱/۵۱	-۰/۱۶	۰/۱۵
۹	۰	۱۳۱/۶۶۹	۱۳۱/۶۹	۱۳۲/۷۵	۰/۰۲	۰/۸۱
	۱	۲۷۴/۱۶۶	۲۷۴/۰۹	۲۷۶/۲۰	-۰/۰۳	۰/۷۴
	۲	۴۵۰/۳۰۶	۴۴۹/۶۰	۴۵۰/۹۰	۰/۱۶	۰/۱۳
۱۰	۰	۱۳۱/۶۱۵	۱۳۱/۶۴	۱۳۲/۶۰	۰/۰۲	۰/۷۴
	۱	۲۷۴/۰۵۵	۲۷۳/۹۶	۲۷۵/۸۹	-۰/۰۳	۰/۶۶
	۲	۴۵۰/۱۲۳	۴۴۹/۴۲	۴۵۰/۷۴	-۰/۱۶	۰/۱۴

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های ورق دایروی FG برحسب هرتز (Hz) با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

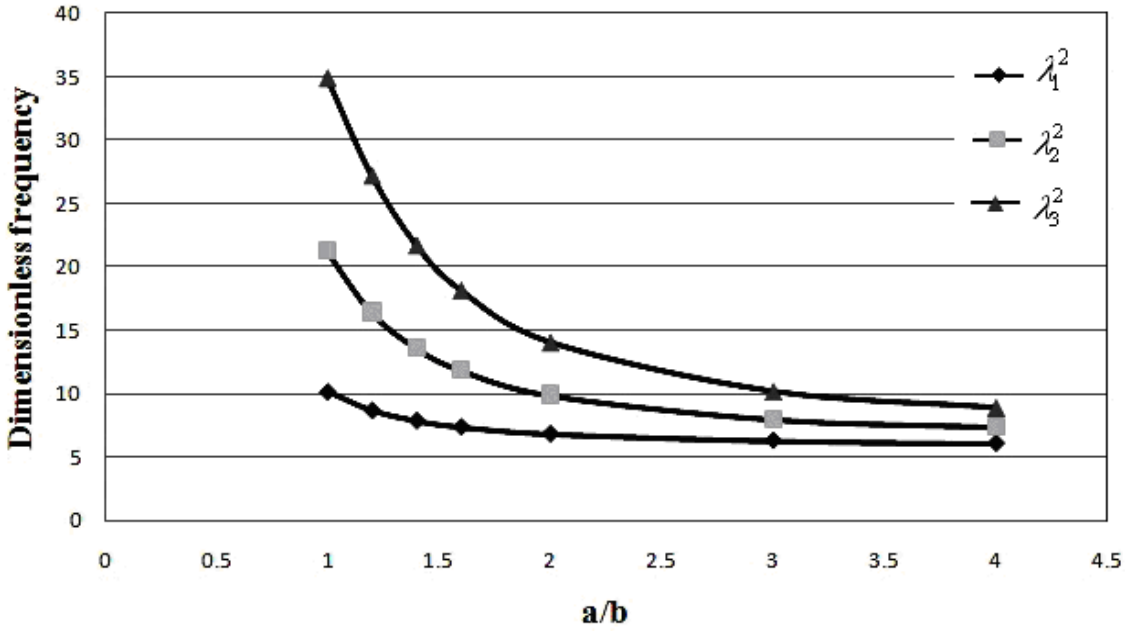
g	n	تحلیل حاضر	مرجع [۲۳]	FEM [۲۳]	%Diff 1	%Diff 2
۰	۰	۶۶/۸۶۵۹	۶۶/۸۶	۶۷/۲۷	۰/۰۰	۰/۶۰
	۱	۱۸۸/۳۱۱	۱۸۸/۳۱	۱۸۹/۵۸	-۰/۰۱	۰/۶۷
	۲	۳۴۷/۱۰۳	۳۴۷/۰۴	۳۴۹/۳۶	۰/۰۰	۰/۶۵
۱	۰	۶۵/۰۲۸۸	۶۵/۰۳	۶۵/۳۷	۰/۰۱	۰/۵۲
	۱	۱۸۳/۱۳۷	۱۸۳/۱۶	۱۸۴/۳۸	-۰/۰۳	۰/۶۷
	۲	۳۳۷/۵۶۷	۳۳۷/۴۶	۳۳۹/۷۸	۰/۰۱	۰/۶۵
۳	۰	۶۴/۱۰۲۱	۶۴/۱۱	۶۴/۵۱	۰/۰۱	۰/۶۳
	۱	۱۸۰/۵۲۷	۱۸۰/۵۵	۱۸۱/۹۵	۰/۰۰	۰/۷۸
	۲	۳۳۲/۷۵۶	۳۳۲/۷۵	۳۳۵/۳۱	۰/۰۱	۰/۷۶
۵	۰	۶۳/۸۱۴۶	۶۳/۸۲	۶۴/۲۳	۰/۰۲	۰/۶۵
	۱	۱۷۹/۷۱۸	۱۷۹/۷۵	۱۸۱/۱۷	۰/۰۰	۰/۸۰
	۲	۳۳۱/۲۶۳	۳۳۱/۲۵	۳۳۸/۸۷	۰/۰۱	۲/۲۴
۷	۰	۶۳/۶۸۱۹	۶۳/۶۹	۶۴/۰۹	۰/۰۱	۰/۶۴
	۱	۱۷۹/۳۴۴	۱۷۹/۳۷	۱۸۰/۷۹	۰/۰۰	۰/۸۰
	۲	۳۳۰/۵۷۵	۳۳۰/۵۶	۳۳۳/۱۵	۰/۰۰	۰/۷۷
۹	۰	۶۳/۶۰۷۶	۶۳/۶۲	۶۴/۰۱	-۰/۰۲	۰/۶۱
	۱	۱۷۹/۱۳۵	۱۷۹/۱۶	۱۸۰/۵۵	-۰/۰۱	۰/۷۷
	۲	۳۳۰/۱۸۹	۳۳۰/۱۸	۳۳۲/۸۳	۰/۰۰	۰/۷۹
۱۰	۰	۶۳/۵۸۱۸	-	-	-	-
	۱	۱۷۹/۰۶۲	۱۷۹/۱۰	۱۸۰/۴۸	-۰/۰۲	۰/۷۶
	۲	۳۳۰/۰۵۵	۳۳۰/۰۶	۳۳۲/۵۹	۰/۰۰	۰/۷۶

مسلما، هنگامیکه شاخص گرادیان به سمت صفر میل می‌کند، ورق به صورت همگن در می‌آید. در جدول ۵، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق همگن بیضوی با نسبت‌های متفاوتی از قطر کوچک به قطر بزرگ، با مقادیر مشابه بدست آمده توسط سریباسی و آلتای [۱۴]، لیسا [۱۱] و سینگ و چاکراورتی[۱۴] [۲۴] مقایسه شده است. شرط مرزی فرض شده برای ورق در این جدول، تکیه گاه ساده می‌باشد. لازم به ذکر است که شکل بی‌بعد فرکانس طبیعی که با رابطه (۲۱) تعریف شده است، در تئوری کلاسیک ورق مستقل از ضخامت آن است. نتایج این جدول نیز همخوانی و سازگاری بسیار مناسب بین نتایج را تایید می‌نماید. همانگونه که مشخص است با افزایش نسبت قطرها، فرکانس‌های طبیعی ورق کاهش می‌یابند.

جدول ۵- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق بیضوی ایزوتروپیک همگن

a/b	$\nu=۰/۵$				$\nu=۰/۲۵$			
	مرجع [۲۴]	مرجع [۱۱]	مرجع [۱۴]	تحلیل حاضر	مرجع [۲۴]	مرجع [۱۱]	مرجع [۱۴]	تحلیل حاضر
۱/۰	۵/۲۱۲۷	۵/۲۱۹	۵/۲۱۲۷	۵/۲۱۲۶۵	۴/۸۶۰۱	۴/۸۶۵	۴/۸۶۰۱	۴/۸۶۰۱۳
۱/۱	۴/۷۶۶۲	۴/۷۷۲	۴/۷۶۶۲	۴/۷۶۶۱۶	۴/۴۴۸۹	۴/۴۵۴	۴/۴۴۹۰	۴/۴۴۸۹۵
۱/۲	۴/۴۳۵۶	۴/۴۴۲	۴/۴۳۵۶	۴/۴۳۵۵۸	۴/۱۵۲۶	۴/۱۵۷	۴/۱۵۲۶	۴/۱۵۲۵۹
۱/۴	۳/۹۸۹۸	۳/۹۹۰	۳/۹۸۹۸	۳/۹۸۹۸۲	۳/۷۶۷۹	۳/۷۷۳	۳/۷۶۷۹	۳/۷۶۷۸۷
۱/۷	۳/۶۰۷۸	۳/۶۱۷	۳/۶۰۷۸	۳/۶۰۷۸۱	۳/۴۵۵۵	۳/۴۶۳	۳/۴۵۵۵	۳/۴۵۵۴۸
۲/۰	۳/۳۸۶۶	۳/۳۹۹	۳/۳۸۶۶	۳/۳۸۶۶۱	۳/۲۸۱۳	۳/۲۹۲	۳/۲۸۱۳	۳/۲۸۱۲۷
۲/۵	۳/۱۶۹۸	۳/۱۸۹	۳/۱۶۹۸	۳/۱۶۹۸۱	۳/۱۰۹۸	۳/۱۲۸	۳/۱۰۹۸	۳/۱۰۹۸۰
۳/۰	۳/۰۳۷۸	۳/۰۶۶	۳/۰۳۷۸	۳/۰۳۸۷۳	۳/۰۰۱۴	۳/۰۲۷	۳/۰۰۱۴	۳/۰۰۱۴۱

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]



شکل ۳- نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق بیضوی FG برحسب نسبت قطرها

این امر به دلیل کاهش صلبیت ورق می‌باشد، چرا که با افزایش نسبت مذکور، ورق از شکل دایروی به سمت شکل میله‌ای پیش می‌رود. این مساله عینا در مورد ورق‌های بیضوی FG نیز صادق است. در تایید این موضوع، نمودار تغییرات سه فرکانس طبیعی اول ورق FG برحسب نسبت a/b در شکل ۳ نشان داده شده است.

همانگونه که در این شکل مشخص است، هنگامی که نسبت شعاعها برابر با واحد می‌باشد، بیشترین مقدار اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی وجود دارد. حال آن-که با افزایش این نسبت، مقدار اختلاف مذکور کاهش می‌یابد. ضمن اینکه مقادیر فرکانس‌های ورق نیز کاهش یافته و مجانب‌وار به سمت مقدار مشخصی میل می‌کنند.

در جدول ۶ نیز نتایج بدست آمده از کد کامپیوتری برای ورق FG با نتایجی که از طریق نرم افزار المان محدود ABAQUS بدست آمده مورد مقایسه واقع شده است. لازم به ذکر است که برای مدل‌سازی نرم-افزاری، تعداد ۲۱۴۳۰ المان از نوع C3D20R که از نوع تنش سه-بعدی (3D stress) است، برای رسیدن به فرکانس همگرا شده استفاده شده است. همچنین، برای شبیه سازی مدل FGM در این نرم افزار، در راستای ضخامت ورق، ۲۰ ماده همگن مختلف تعریف شده که معرف نحوه تغییر تدریجی خواص مکانیکی ورق در راستای ضخامت می‌باشد. برای تحلیل ارتعاشات آزاد نیز از روش Lanczos استفاده شده است.

در استخراج نتایج نرم افزار، همگرایی فرکانس‌ها مورد بررسی قرار گرفت تا از دقت آنها اطمینان حاصل شود. در این جدول سه فرکانس بی‌بعد اول ورق بیضوی با نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک ۲ و نسبت ضخامت به شعاع کوچک ۰/۰۵ و با شرایط مرزی متفاوت و شاخص گرادیان برابر با واحد آورده شده است. نتایج موجود در جدول گواه آن است که فرکانس‌های بدست آمده از روش ریتز بسیار نزدیک به نتایج المان محدود در نرم‌افزار ABAQUS می‌باشند.

به منظور بررسی تاثیر شاخص گرادیان، در جدول ۷، فرکانس طبیعی پایه‌ای مربوط به ورق بیضوی FGM2 با شرایط مرزی مختلف و مقادیر متفاوت شاخص گرادیان ارائه شده است. ورق دارای نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک ۲ بوده و نسبت ضخامت به شعاع کوچک ۰/۰۳ فرض شده است.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

جدول ۶- مقایسه سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد ورق بیضوی FGM2 با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	نوع روش	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2
تکیه‌گاه ساده	تحلیل ریتز	۳/۲۱۲۶۱	۵/۷۴۸۶۴	۹/۳۲۴۹۴
	المان محدود (آباکوس)	۳/۳۵۱۴۸	۶/۱۴۸۱۸	۹/۹۴۵۰۵
لبه گیردار	تحلیل ریتز	۶/۶۵۶۳۲	۱۳/۶۹۳۲	۲۱/۵۴۱۷
	المان محدود (آباکوس)	۶/۶۹۸۸۱	۱۴/۸۴۳۴	۲۲/۲۷۹۸
لبه آزاد	تحلیل ریتز	۱/۶۲۹۴۳	۲/۵۶۴۴۹	۴/۱۸۴۴۱
	المان محدود (آباکوس)	۱/۷۴۵۹۴	۳/۲۴۴۵۴	۴/۴۶۶۰۵

جدول ۷- تاثیر شاخص گرادیان (g) بر فرکانس‌های بی‌بعد پایه (λ_1^2) ورق بیضوی FG با شرایط مرزی مختلف

g	لبه گیردار	تکیه‌گاه ساده	لبه آزاد
۰	۶/۸۴۴۳۶	۳/۳۰۳۳۶	۱/۶۶۷۶۵
۱	۶/۶۵۶۳۲	۳/۲۱۲۶۱	۱/۶۲۱۸۳
۲	۶/۵۹۲۵۰	۳/۱۸۱۸۳	۱/۶۰۶۲۹
۳	۶/۵۶۱۴۷	۳/۱۶۶۸۳	۱/۵۹۸۷۲
۴	۶/۵۴۳۵۲	۳/۱۵۸۱۶	۱/۵۹۴۳۴
۵	۶/۵۲۸۲۰	۳/۱۵۲۶۲	۱/۵۹۱۵۵
۶	۶/۵۲۴۱۵	۳/۱۴۸۸۲	۱/۵۸۹۶۲
۷	۶/۵۱۹۴۵	۳/۱۴۶۰۷	۱/۵۸۸۲۴
۸	۶/۵۱۴۱۷	۳/۱۴۴۰۰	۱/۵۸۷۱۹
۹	۶/۵۱۰۸۵	۳/۱۴۲۴۰	۱/۵۸۶۳۸
۱۰	۶/۵۰۸۲۰	۳/۱۴۱۱۲	۱/۵۸۵۷۴
۱۱	۶/۵۰۶۰۶	۳/۱۴۰۰۹	۱/۵۸۵۲۲
۱۲	۶/۵۰۴۲۹	۳/۱۳۹۲۳	۱/۵۸۴۷۹

همانطور که در این جدول دیده می‌شود، به ازای همه مقادیر شاخص گرادیان و شرایط مرزی مختلف، با افزایش n، فرکانس‌های طبیعی افزایش می یابند. این امر به دلیل آن است که ورق در مودهای بالاتر سفتی بیشتری را از خود نشان می دهد. نکته دیگری که از این دو جدول استنتاج می‌شود کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق به ازای افزایش شاخص گرادیان می‌باشد. زیرا همانگونه که در شکل ۲ دیده می‌شود، با افزایش شاخص گرادیان، مقدار متوسط سفتی ورق کاهش می-یابد. نرخ کاهش فرکانس‌ها با افزایش شاخص گرادیان کاهش می‌یابد، به نحوی که، مشاهده می‌شود که پس از آن‌که شاخص گرادیان از ۷ بیشتر می‌گردد، هیچ تغییر قابل توجهی در مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق مشاهده نمی‌شود، چرا که بر اساس روابط (۲) و (۳)، با میل کردن شاخص گرادیان به سمت بی‌نهایت، خصوصیات مکانیکی ورق FG به سمت یک ماده همگن میل می‌کند.

در جدول ۸، پنج فرکانس بی‌بعد اول ورق بیضوی FGM1 با نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک ۲ و نسبت ضخامت به شعاع کوچک ۰/۰۵، بر اساس هر دو روش ریتز و المان محدود در نرم افزار ABAQUS ارائه شده است. این نتایج عددی برای شرایط مرزی مختلف و با فرض شاخص گرادیان واحد محاسبه شده-اند. همخوانی مناسب بین مقادیر عددی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد که از دو روش مختلف بدست آمده‌اند، صحت روش حل تحلیل حاضر را برای ماده FGM1 تایید می‌کند.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

جدول ۸- مقایسه پنج فرکانس طبیعی اول بی‌بعد ورق بیضوی FGM1 با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	نوع روش	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2	λ_4^2	λ_5^2
تکیه‌گاه ساده	تحلیل ریتز	۵/۳۹۸۰۷	۱۵/۶۵۷۲	۳۳/۳۷۸۰	۴۰/۳۵۷۶	۶۰/۶۸۰۰
	المان محدود (آباکوس)	۵/۴۵۲۴۴	۱۵/۸۵۴۱	۳۳/۷۴۸۹	۴۱/۴۴۵۸	۶۲/۴۵۲۲
لبه گیردار	تحلیل ریتز	۱۱/۱۸۴۵	۲۲/۸۷۱۴	۴۲/۹۶۱۷	۵۴/۰۷۳۳	۷۵/۷۶۶۶
	المان محدود (آباکوس)	۱۱/۲۴۷۵	۲۳/۵۶۴۸	۴۳/۴۵۶۴	۵۵/۱۴۷۹	۷۶/۷۸۶۹
لبه آزاد	تحلیل ریتز	۲/۷۲۵۱۱	۱۱/۳۴۴۰	۱۲/۸۸۳۳	۲۵/۲۴۴۶	۳۱/۷۰۸۰
	المان محدود (آباکوس)	۲/۸۵۴۱۷	۱۱/۸۹۴۷	۱۳/۱۷۳۴	۲۶/۰۴۱۴	۳۲/۲۱۴۵

در پایان، به منظور آن‌که درک بهتر و تصویر روشن‌تری نسبت به نحوه ارتعاش ورق‌های بیضوی و همچنین مودهای ارتعاشی متقارن- متقارن، پادمتقارن- پادمتقارن، متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- متقارن حاصل شود تعدادی از شکل مودهای ورق بیضوی FGM ترسیم شده است. بدین منظور، بردارهای ویژه متناظر با هر فرکانس طبیعی محاسبه شده است. این کار، با استفاده از یک کد کامپیوتری که در نرم‌افزار MATHEMATICA توسعه داده شده، انجام شده است.

شکل مودهای مربوط به ورق FG با لبه آزاد که دارای شعاع کوچک، شعاع بزرگ و ضخامت ۱، ۳ و ۰/۰۲ متر می‌باشد، در شکل ۴ نشان داده شده است. در تمامی این موارد شاخص گرادیان برابر با یک می‌باشد. لازم به ذکر است که مقدار فرکانس طبیعی متناظر با هر شکل مود برحسب هرتز (Hz) در زیر آن آورده شده است. همچنین، به منظور بررسی تاثیر شرایط مرزی بر رفتار ارتعاشی ورق‌های بیضوی، تعدادی شکل مود متناظر با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و لبه گیردار، به ترتیب، در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده است.

۵- نتیجه‌گیری

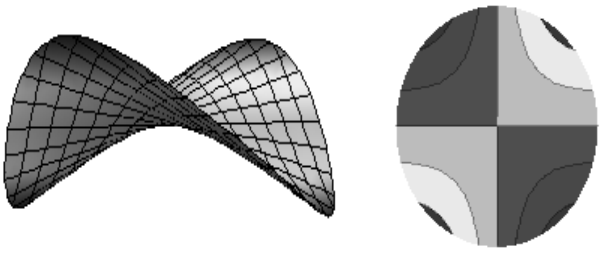
در مقاله حاضر، یک تحلیل ارتعاشات آزاد بر اساس تئوری کلاسیک ورق و روش چند جمله‌ای- ریتز برای ورق‌های بیضوی FG با شرایط مرزی مختلف شامل لبه گیردار، آزاد و تکیه‌گاه ساده ارائه شد و مقادیر متنوعی از فرکانس‌های طبیعی با دقت بالا محاسبه و ارائه گردید که می‌توانند در تحلیل‌های مختلف ارتعاشی و دینامیکی برای رسیدن به یک طراحی قابل اعتماد مورد استفاده قرار گیرند. مقایسه‌های متنوع ارائه شده بین نتایج حاصل از مطالعه انجام شده و مقادیر موجود در منابع و همچنین نتایج حاصل از مدل‌سازی المان محدود، به خوبی صحت تحلیل حاضر را نشان داد. از جمله نتایج جالب توجه بدست آمده، کاهش فرکانس‌های طبیعی ورق بیضوی به ازای افزایش نسبت قطرهای آن و فاصله گرفتن هندسه ورق از حالت دایروی می‌باشد. همچنین، دیده شد که فرکانس‌های طبیعی ورق به ازای افزایش شاخص گرادیان، کاهش می‌یابند که این موضوع به دلیل کاهش مقدار متوسط سفتی ورق در این حالت می‌باشد. همچنین، شکل مودهای مختلف ورق FG که از محاسبه بردارهای ویژه متناظر با هر فرکانس طبیعی حاصل شد، برای شرایط مرزی مختلف ارائه شد.

کلید واژگان

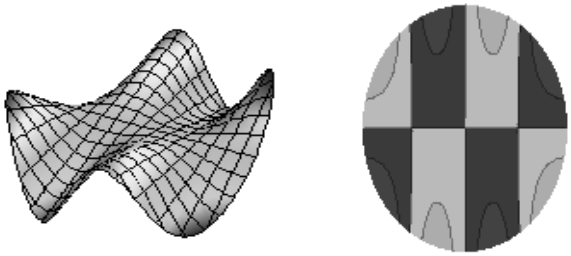
1-Functionally Graded Material
2-Heating, Ventilation and Air Conditioning
3-Abrate
4-Yang and Shen
5-Allahverdizadeh et al.
6-Hosseini-Hashemi
7-Differential Quadrature Method
8-Leissa
9-Sing and Tyagi
10-Beres
11-Ceribasi and Altay
12-Praveen and Reddy
13-Jafari Mehrabadi et al.
14-Singh and Chakraverty

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

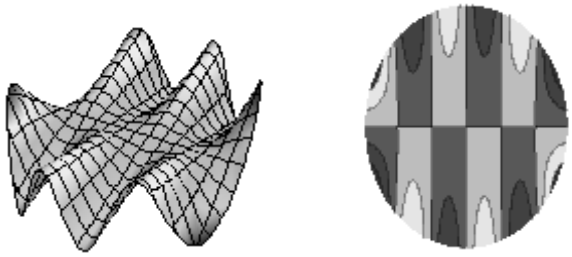
Free (AA)



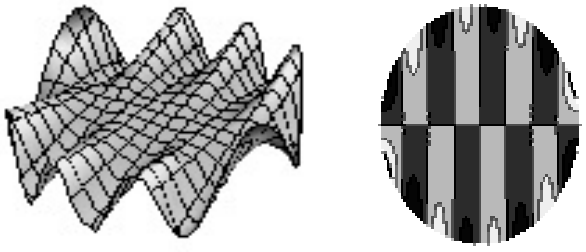
(a) 8.22968



(b) 25.8107

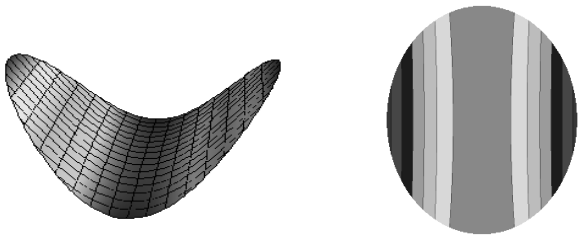


(c) 50.8416

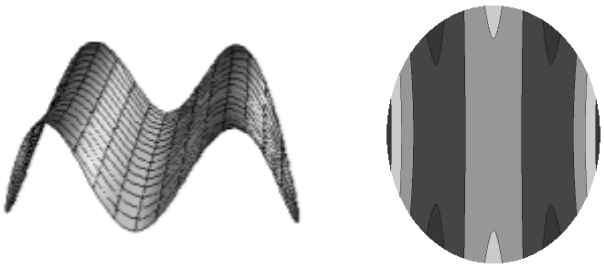


(d) 86.5044

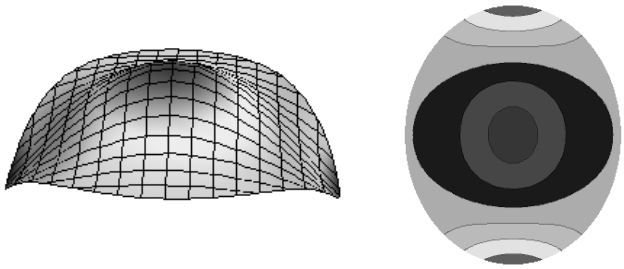
Free (SS)



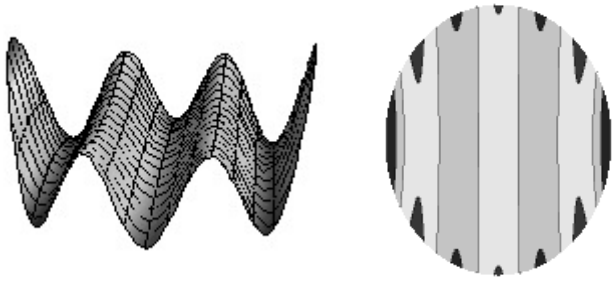
(a) 3.56138



(b) 17.1657



(c) 31.0491

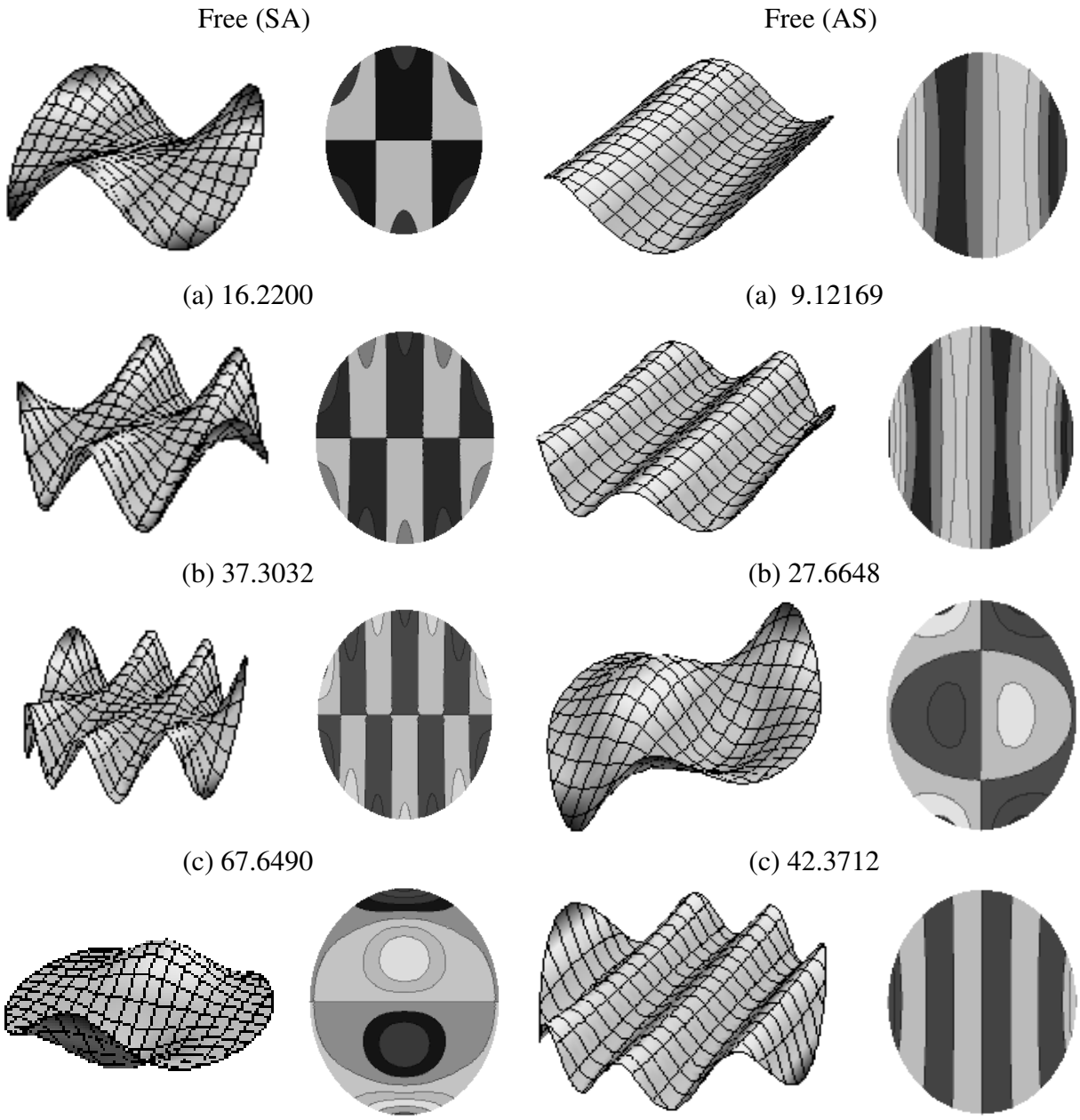


(d) 40.9237

شکل ۴-الف- شکل مودهای متقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه آزاد

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]

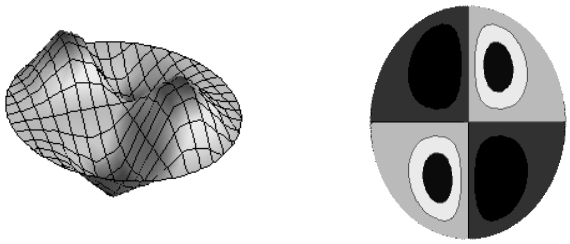
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]



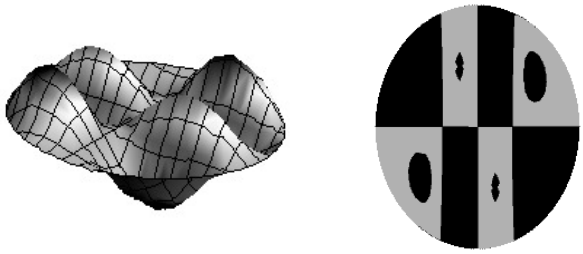
شکل ۴-ب- شکل مودهای متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- متقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه آزاد

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

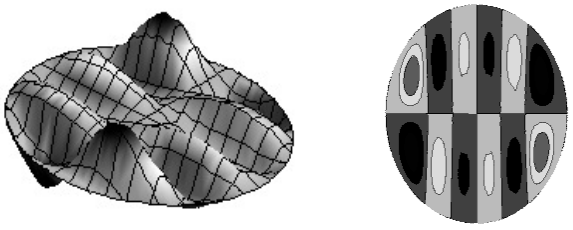
Simply support (AA)



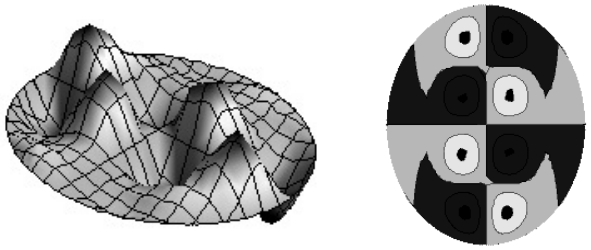
(a) 63.7805



(b) 93.2251

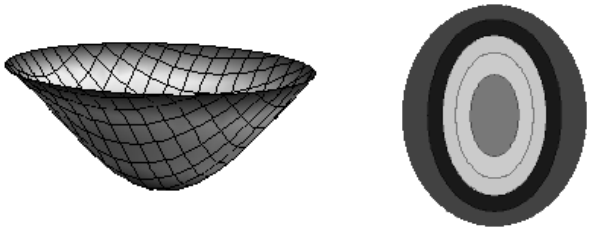


(c) 137.711

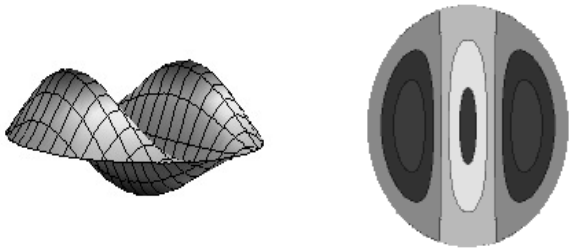


(d) 219.213

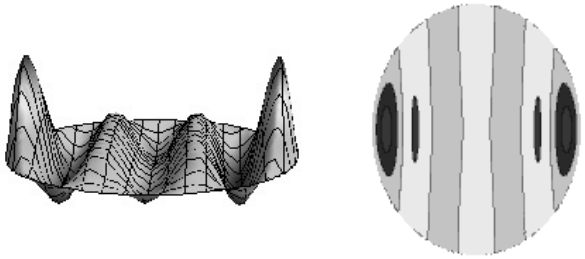
Simply support (SS)



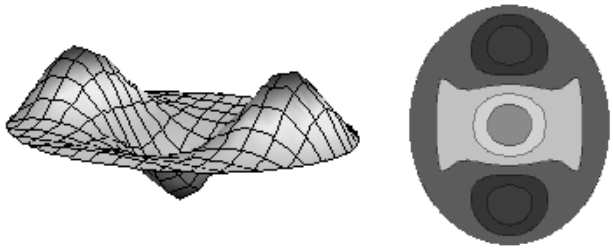
(a) 14.2736



(b) 29.9934



(c) 54.9838

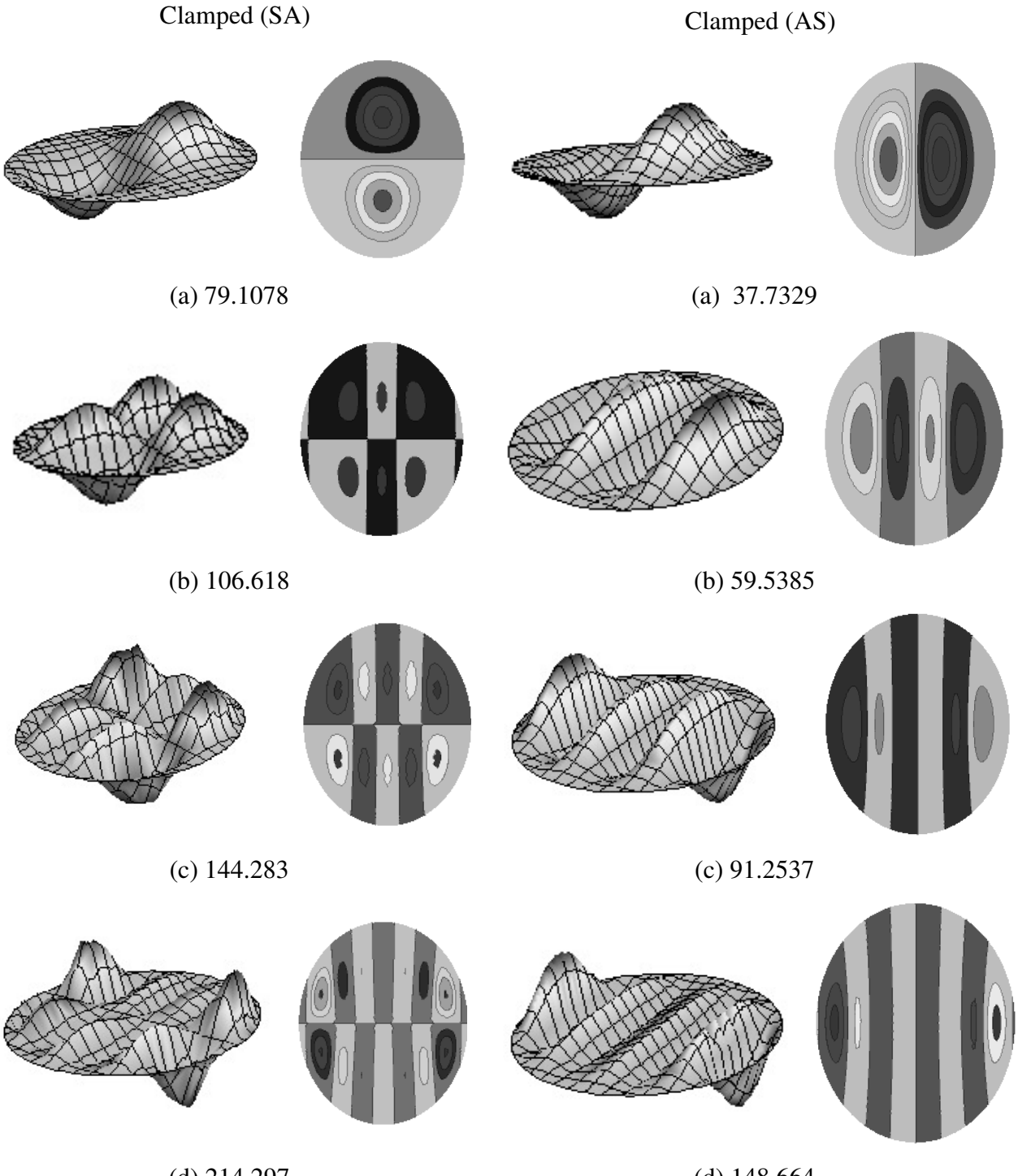


(d) 109.007

شکل ۵- شکل مودهای متقارن- متقارن و پادمتقارن- پادمتقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه تکیه‌گاهی ساده

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]



شکل ۶- شکل مودهای متقارن- پادمتقارن و پادمتقارن- متقارن یک ورق بیضوی FGM با لبه گیردار

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

۸- مراجع

1-Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota, I., (1990), Editors In: Proceedings of First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan.
2-Koizumi, M., (1993), The concept of FGM, Ceramic Transactions: Functionally Gradient Materials, Vol. 34, p. 3-10.
3-Abrate, S., (2008), Functionally graded plates behave like homogeneous plates, Composites Part B-Eng., Vol. 39, p. 151-158.
4-Yang, J. and Shen, H.S., (2001), Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates, Composite Structures, Vol. 54, p. 497-508.
5-Shen, H.S., (2002), Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, p. 561-584.
6-Yang, J. and Shen, H.S., (2003), Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, Composites Part B: Eng, Vol. 34, p. 103-115.
7-Allahverdizadeh, A., Naei, M.H. and Bahrami, M.N., (2008), Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 310, p. 966-984.
8-Hosseini-Hashemi, Sh., Akhavan, H., Rokni Damavandi Taher, H., Daemi, N. and Alibeigloo, A., (2010), Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation, Materials and Design, Vol. 31, p. 1871-1880.
9-Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H. and Akhavan, H., (2010), Vibration analysis of radially FGM sectorial plates of variable thickness on elastic foundations, Composite Structures, Vol. 92, p. 1734-1743.
10-A.W., Leissa, (1969), Vibration of plates, NASA SP-160.
11-A.W., Leissa, (1967), Vibration of a simply-supported elliptic plate, Journal of Sound and Vibration, Vol. 6, p. 145-148.
12-Sing, B. and Tyagi, D.K., (1985), Transverse vibration of an elliptic plate with variable thickness, Journal of Sound and Vibration, Vol. 99, p. 379-39.
13-Beres, D.P., (1974), Vibration analysis of a completely free elliptical plate, Journal of Sound and Vibration, Vol. 34, p. 441-443.
14-Ceribasi, S. and Altay, G., (2009), Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 319, p. 668-680.
15-Praveen, G.N. and Reddy, J.N., (1998), Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, International journal of solids and structures, Vol. 35, p. 4457-4476.
16-Javaheri, R. and Eslami, M.R., (2002), Buckling of Functionally Graded Plates under in-Plane Compressive Loading, ZAMM, Vol. 82, p. 277-283.
17-Vel S.S. and Batra R.C., (2004), Three-Dimensional Exact Solution for the Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 272, p. 703-73.
18-Cheng, Z.Q. and Batra, R.C., (2000), Three-Dimensional Thermoelastic Deformations of a Functionally Graded Elliptic Plate, Composites Part B, Vol. 31, p. 97-106.
19-Woo, J. and Meguid, S.A., (2001), Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells, International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, p. 7409-7421.
20-Hongjun, X., Zhifei, S. and Taotao, Z., (2006), Elastic Analyses of Heterogeneous Hollow Cylinders, Mechanics Research Communications, Vol. 33, p. 681-691.
21-Hosseini-Hashemi, Sh., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., (2011), A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, p. 11-22.
22-Hosseini-Hashemi, Sh., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., (2011), Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure, Composite Structures, Vol. 93, p. 722-735.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]

23-Jafari Mehrabadi, S., Kargarnovin, M.H. and Najafizadeh, M.M., (2009), Free vibration analysis of functionally graded coupled circular plate with piezoelectric layers, Mechanical Science and Technology, Vol. 23, p. 2008-2021.

24-Singh, B. and Chakraverty, S., (1992), Transverse vibration of simply supported elliptical and circular plates using boundary characteristic orthogonal polynomials in two variables, Journal of Sound and Vibration, Vol. 152, p. 149-155.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1391.8.15.2.3]