مدلسازی عددی حوضچه های بنادر رودخانه‌ای و بررسی تاثیر رژیم جریان بر گردابه‌های افقی

امیر محجوب[1*] ، رضا غیاثی[2]

۱- دانشجوی دکتری سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده عمران، دانشگاه تهران
۲- استادیار دانشکده عمران، دانشگاه تهران

چکیده

استفاده از بنادر رودخانه‌ای به منظور پهلوگیری کشتی‌ها با مشکلاتی همراه است که عمده‌ترین آنها رسوب‌گذاری و لای‌گرفتگی در درون این بنادر می‌باشد. نحوه رسوبگذاری و نشست لای در بنادر مزبور به شکل گردش آب در درون آنها بستگی دارد. در این مقاله مدل دو بعدی در پلان برای مدلسازی جریان در حوضچه‌ها و بنادر رودخانه‌ای تشریح شده است. معادلات حاکم بر جریان سیال به روش حجم کنترل منقطع سازی شده و از طریق الگوی SIMPLER حل گردیده اند. همچنین بمنظور رفع مشکلاتی نظیر نوسان درنتایج و عدم همگرایی حل معادلات برای برخی شرایط در مدلسازی دوبعدی جریان، نتایج بدست آمده در میدان محاسباتی دو بعدی شامل عمق آب و سرعتهای محاسبه شده، با اطلاعات یک بعدی مقایسه گردیده و در صورت نیاز نتایج به دست آمده اصلاح می شوند. برای اطمینان از صحت عملکرد مدل، نتایج مدلسازی جریان در بازشدگی ناگهانی کانال با نتایج معتبر مقایسه شده است که بیانگر انطباق خوبی بین نتایج است. از مدل تهیه شده برای بررسی جریان در بنادر و حوضچه های کنار رودخانه استفاده شده است. بدین منظور جریانهایی با میدان هندسی ثابت و اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. گردابه های تشکیل شده در مناطق مختلف حوضچه با اعداد رینولدز مختلف رسم شده و نسبت بین طول بازشدگی در رودخانه و طول گردابه‌ها، نشان داده شده است. با استفاده از پروفیل سرعت بدست آمده در حالات مختلف، می توان مناطقی را که احتمال رسوبگذاری در آنها بیشتر است نیز تشخیص داد.

کلمات کلیدی: جریان در پله معکوس، روش حجم کنترل، الگوریتم SIMPLER، حوضچه و بنادر رودخانه‌ای

NUMERICAL MODELING OF RIVER DEAD ZONES AND THE EFFECTS OF FLOW REGIME ON HORIZONTAL VORTICES

Amir Mahjoob[1], Reza Ghiassi[2]

1- PhD Student, Faculty of Engineering, University of Tehran
2- Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Tehran

Abstract

Using dead zones of rivers for berthing purpose may involve some problems of which the most serious are sedimentation and silting. These processes depend on water flow pattern in these zones. In this paper, a two dimensional depth averaged model is explained for flow modeling in river dead zones. Governing equations of fluid flow are discretised using the "Control Volume" method and solved by applying the "SIMPLER" algorithm. To reduce some instability problems such as oscillation and non-convergence of the results, two dimensional

* نویسنده مسوول مقاله amahjoob@ut.ac.ir

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

results are compared with one dimensional data and some justifications are made where necessary. To verify the model, results of the flow modeling in backward facing step have been compared with some validated data and proved efficiency of the technique. The model was then applied to simulate a river dead zone flow. A rectangular geometrical section was applied and several Reynolds numbers were considered for flow modeling. Velocity profiles and vortices are given in some positions of the zone for several Reynolds numbers. Non-dimensional vortex length variations are drawn for several Reynolds number. The locations where sedimentation may occur are predicted and discussed based on velocity profile.
Keywords: River Dead Zone, Backward Facing Step, SIMPLER Algorithm, Control Volume Method

۱- مقدمه

استفاده از راههای آبی مانند خورها و رودخانه‌ها به دلیل کم هزینه بودن آنها امری اجتناب ناپذیر است. از طرف دیگر پهلوگیری کشتی‌ها در سواحل طبیعی رودخانه‌ها مشکلاتی را به همراه دارد که عمده‌ترین آنها کافی نبودن عمق آب این نواحی برای آبخور کشتی‌ها است. برای از بین بردن مشکلات مزبور حوضچه‌هایی در امتداد ساحل رودخانه‌ها ساخته می‌شود که به بنادر رودخانه‌ای موسوم هستند[۱].

در گذشته نیز بنادری با اشکال و اندازه‌های مختلف ساخته شده‌اند ولی بعدها معلوم شده است که این بنادر به علت لای گرفتگی یا رسوب‌گذاری در درون آنها پس از مدتی کارآیی مطلوب خود را از دست می‌دهند و یا در بعضی از مواقع بدون استفاده باقی می‌مانند. بنابراین در صورتی که تدابیر لازم در طراحی و ساخت اینگونه بنادر اتخاذ نگردد، هزینه‌های نگهداری آنها افزایش خواهند یافت. این هزینه‌ها شامل لایروبی درون حوضچه و دفع ضایعات رسوبی می‌باشد. بنابراین باید در طراحی و ساخت حوضچه‌های ساحلی برای استفاده از راههای آبی، تدابیری اتخاذ شود تا این بنادر با داشتن کارآیی مورد انتظار از نظر اقتصادی مقرون به صرفه باشد و هزینه‌های نگهداری آنها نیز افزایش نیابد. از آنجا که نحوه رسوبگذاری و نشست لای در بنادر مزبور به شکل گردش آب موجود در درون آنها بستگی دارد، از اینرو ضرورت دارد که در ابتدا الگوی نسبتاً دقیق گردش آب در درون بنادر مزبور تعیین گردد و پس از آن مدل رسوب مناسبی مورد استفاده قرار گیرد. مطالعه و بررسی الگوی گردش آب در حالات مختلف توسط تعدادی از پژوهشگران انجام یافته است که در ادامه به ذکر مواردی از آن پرداخته خواهد شد[۲].

در سال ۱۹۹۷ بررسی خصوصیات جریان در بندر توسط کیمورا و هوسودا (Kimura & Hosoda) انجام گردیده است. بدین منظور یک مدل آزمایشگاهی و یک مدل عددی دوبعدی برای تحقیق در مورد خصوصیات جریان ناماندگار در یک کانال باز با بندر مستطیل شکل تهیه شده است و به تشریح خصوصیات دو گردابه تشکیل شده و تراز سطح آب در زمانهای مختلف پرداخته است. نسبت طول به عرض بندر مورد مطالعه ۱ به ۱/۵ می‌باشد[۳].

در سال ۱۳۸۲ حکیم زاده و حافظی زاده به مدلسازی عددی گردش آب ثانویه در بنادر رودخانه‌ای مستطیل شکل پرداخته‌اند. در این بررسی از حل معادلات انتگرال گیری شده در عمق برای شبیه سازی جریان توربولانس به روش تفاضل محدود صریح استفاده شده است. شبکه بندی هندسه میدان از نوع متناوب بوده است. نتایج گسسته سازی عبارات مربوط به شتابهای انتقالی از دو روش لکس (Lax) و بالادست (Upwind_Downwind) با یکدیگر مقایسه شده است. در این مطالعه نیز نسبت طول به عرض بندر مورد مطالعه ۱ به ۱/۵ بوده است[۲].

در سال ۲۰۰۵ آقای ینگ (Yang) و همکاران تحقیقی بر روی جریان در بازشدگی ناگهانی با کاربرد تعدادی روشهای خطی و غیر خطی برای مدلسازی آشفتگی انجام داده‌اند. شبیه سازی عددی به روش حجم محدود انجام پذیرفته است. نتایج عددی با مدل آزمایشگاهی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد طول گردابه تشکیل شده بعد از بازشدگی در مدل $k-\varepsilon$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

غیر خطی مرتبه دوم و مدل غیر خطی مرتبه سوم نسبت به سایر مدلها تطابق بهتری با مدل آزمایشگاهی دارد. پروفیل سرعت در عرض رودخانه در تمامی مدلها تطابق خوبی با مدل آزمایشگاهی دارد [۴].

در سال ۲۰۰۶ آقای چن (Chen) وهمکاران به بررسی اثر نسبت بازشدگی بر روی جریان پرداخته‌اند. در این تحقیق مدلسازی دوبعدی در پلان کانال به روش حجم محدود صورت پذیرفته است. دو پارامترهای ارتفاع پله بازشدگی ۰/۱۹ متر و رینولدز جریان ۲۸۰۰۰ ، ثابت در نظر گرفته شده است.خصوصیات هیدرودینامیکی برای نسبتهای بازشدگی ۱/۱۱ ، ۱/۲۵ و ۱/۶۷ در مقاطع مختلف بعد از بازشدگی رسم شده است. نتایج حاصل با مدل آزمایشگاهی نیز مقایسه گردیده است و از انطباق خوبی با مدل عددی برخوردار است. مقادیر انرژی جنبشی آشفتگی هم محاسبه شده است و نتیجه حاصله این است که افزایش ارتفاع پله باعث افزایش انرژی جنبشی آشفتگی خواهد شد [۵].

در این مقاله، مدلی دو بعدی که در آن پلان رودخانه به یک شبکه دوبعدی تقسیم شده و معادلات حاکم بر جریان سیال به روش حجم کنترل منقطع سازی گردیده‌اند، ارائه شده است. معادلات منقطع سازی شده ازطریق الگوریتم SIMPLER [1] حل شده است. بعلت بالابودن حجم عملیات محاسباتی یا تغییرات ناگهانی در میدان هندسی، وجود نوسان در نتایج قابل پیش بینی است. بدین منظور، نتایج بدست آمده در میدان محاسباتی دو بعدی شامل عمق آب و سرعتهای محاسبه شده، با اطلاعات یک بعدی مقایسه گردیده و در صورت نیاز، نتایج به دست آمده اصلاح می شود. برای کنترل واسنجی مدل به بررسی جریان در یک بازشدگی ناگهانی پرداخته شده است. در ادامه مدلسازی جریان در بندر روخانه‌ای صورت گرفته و در نهایت تحلیلی بر نتایج بدست آمده ارائه شده است.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریانهای دو بعدی با عمق متوسط در حالت کلی از انتگرال گیری معادلات سه بعدی هیدرودینامیک بدست می‌آید. فرم متوسط گیری شده در عمق معادلات پیوستگی و اندازه حرکت با فرض جریان غیر تراکم پذیر و صرفنظر از نیروی کوریولیس و باد در سیستم مختصات کارتزین به صورت معادلات (۱)، (۲) و (۳) در می‌آید[۲و ۶].

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \qquad (۱)$$

معادله اندازه حرکت در راستای x:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U^2}{\partial x}+\frac{\partial (UV)}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x} - gU\frac{n^2\sqrt{(U^2+V^2)}}{H^{4/3}} + (\nu_l+\nu_t)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] \qquad (۲)$$

معادله اندازه حرکت در راستای y:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial (VU)}{\partial x}+\frac{\partial V^2}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y} - gV\frac{n^2\sqrt{(U^2+V^2)}}{H^{4/3}} + (\nu_l+\nu_t)\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] \qquad (۳)$$

در این معادلات، η تراز سطح آب، H عمق آب، U مولفه سرعت متوسط در راستای x، V مولفه سرعت متوسط در راستای y، n ضریب زبری مانینگ، ν_l ویسکوزیته سینماتیکی آب و ν_t ویسکوزیته گردابی متوسط در عمق است که با استفاده از مدل طول اختلاط به صورت معادله (۴) بدست می‌آید. در معادله اخیر، k ضریب وون کارمن، U_* سرعت برشی بستر می باشد. مقدار $\frac{k}{6}$ براساس پیشنهاد Fischer برابر ۰/۱۵ در نظر گرفته می‌شود[۷]. مقدار U_* نیز از رابطه (۵) بدست می‌آید.

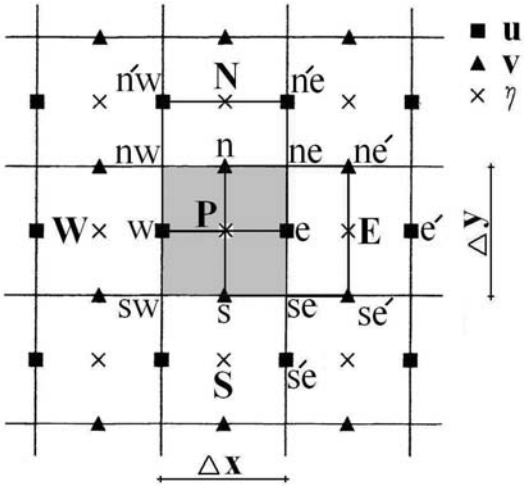
[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

$$\nu_t = \frac{k}{6} U_* H \qquad (۴)$$

$$U_* = \frac{n\sqrt{g}}{h^{0.16}} \sqrt{(U^2 + V^2)} \qquad (۵)$$

۳- روش حل عددی معادلات

برای منقطع سازی معادلات حاکم از روش حجم کنترل (Control Volume) استفاده شده است و بمنظور حل معادلات منقطع سازی شده الگوی SIMPLER انتخاب گردیده است. مطابق شکل ۱ شبکه بندی مورد استفاده از نوع شبکه‌بندی متناوب می‌باشد و برای تعیین مقادیر سرعت بر روی مرزها روش Upwind مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۱- شبکه متناوب و حجم کنترل معادلات پیوستگی و اندازه حرکت

در این نوع شبکه بندی حجم کنترل مربوط به منقطع سازی معادله اندازه حرکت در جهت x به اندازه نصف المان، در همان جهت، با حجم کنترل مربوط به منقطع سازی معادله پیوستگی از لحاظ موقعیت متفاوت است. همچنین حجم کنترل مربوط به منقطع سازی معادله اندازه حرکت در جهت y به اندازه نصف المان، در جهت y، با حجم کنترل مربوط به منقطع سازی معادله پیوستگی از لحاظ موقعیت متفاوت است. در شکل ۱ ، حجم کنترل جهت منقطع سازی معادله پیوستگی، اندازه حرکت در جهت x و اندازه حرکت در جهت y به ترتیب احجام $ne-nw-sw-se$ و $n'e-n'w-w-e, ne'-n-s-se'$, در نظر گرفته شده است.

با توجه به مطالب ارائه شده، معادله اندازه حرکت در جهت x، بمنظور منقطع سازی به روش حجم کنترل به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + S_x \\
&S_x = -gU\frac{n^2\sqrt{\left(U^2+V^2\right)}}{H^{4/3}} \\
&J_x = U^2 - \nu\frac{\partial U}{\partial x} \\
&J_y = UV - \nu\frac{\partial U}{\partial y} \\
&\nu = \nu_l + \nu_t
\end{aligned} \qquad (۶)$$

محاسبه انتگرال معادله (۶) روی حجم کنترل $ne'-n-s-se'$ (نشان داده شده در شکل ۱) به صورت زیر است. [۸]

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(U_e^{n+1} - U_e^n\right)}{\Delta t}\Delta x\Delta y + J_{xE}\Delta y - J_{xP}\Delta y \\
&+ J_{yne}\Delta x - J_{yse}\Delta x = g\left(\eta_P - \eta_E\right)\Delta y \\
&+ S_x\Delta x\Delta y
\end{aligned} \qquad (۷)$$

در معادله (۷) با در نظر گرفتن حجم کنترل مربوط به معادله اندازه حرکت در جهت x پارامترهای J_{xE}, J_{xP} مقدار J_x بر روی مرز P و E بوده و J_{yse}, J_{yne} مقدار J_y بر روی مرز ne و se است. بمنظور اطمینان از حفظ پیوستگی در معادله منقطع شده اندازه حرکت x، معادله پیوستگی بر روی حجم کنترل اندازه حرکت منقطع شده و با آن ترکیب می‌گردد. انتگرال معادله پیوستگی بر روی حجم کنترل $ne'-n-s-se'$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&F_E - F_P + F_{ne} - F_{se} = 0 \\
&F_E = U_E\Delta y \quad , \quad F_P = U_P\Delta y \quad , \\
&F_{ne} = V_{ne}\Delta x \quad , \quad F_{se} = V_{se}\Delta x
\end{aligned} \qquad (۸)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

معادله (۸) درعبارت U_e^{n+1} ضرب شده و از معادله (۷) کسر می‌گردد.

$$\begin{aligned}&\frac{\left(U_e^{n+1}-U_e^{n}\right)}{\Delta t}\Delta x\Delta y\\&+\left(J_{xE}\Delta y-F_E\times U_e^{n+1}\right)\\&-\left(J_{xP}\Delta y-F_P\times U_e^{n+1}\right)\\&+\left(J_{yne}\Delta x-F_{ne}\times U_e^{n+1}\right)\\&-\left(J_{yse}\Delta x-F_{se}\times U_e^{n+1}\right)\\&=g\left(\eta_P-\eta_E\right)\Delta y+S_x\Delta x\Delta y\end{aligned}\qquad(۹)$$

جهت محاسبه سرعتها در مرز المان از روش Upwind استفاده گردیده است، بنابراین:

$$\begin{aligned}&J_{xE}\Delta y-F_E\times U_e^{n+1}=\\&a_E\left(U_e^{n+1}-U_{e'}^{n+1}\right)\\&J_{xP}\Delta y-F_P\times U_e^{n+1}=\\&a_P\left(U_w^{n+1}-U_e^{n+1}\right)\\&J_{yne}\Delta x-F_{ne}\times U_e^{n+1}=\\&a_{ne}\left(U_e^{n+1}-U_{n'e}^{n+1}\right)\\&J_{yse}\Delta x-F_{se}\times U_e^{n+1}=\\&a_{se}\left(U_{s'e}^{n+1}-U_e^{n+1}\right)\end{aligned}\qquad(۱۰)$$

ضرایب a_{se},a_{ne},a_P,a_E از معادله (۱۱) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}a_E&=\frac{\nu\Delta y}{\Delta x}+\max\left(-F_E,0\right)\\a_P&=\frac{\nu\Delta y}{\Delta x}+\max\left(F_P,0\right)\\a_{ne}&=\frac{\nu\Delta x}{\Delta y}+\max(-F_{ne},0)\\a_{se}&=\frac{\nu\Delta x}{\Delta y}+\max(-F_{se},0)\end{aligned}\qquad(۱۱)$$

با جایگذاری معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۹) عبارت منقطع شده معادله اندازه حرکت در جهت x به صورت زیر استخراج می‌گردد.

$$\begin{aligned}&a_eU_e^{n+1}=a_EU_{e'}^{n+1}+a_PU_w^{n+1}\\&+a_{ne}U_{n'e}^{n+1}+a_{se}U_{s'e}^{n+1}+b_x\\&+g\left(\eta_P-\eta_E\right)\Delta y\\&b_x=S_x\Delta x\Delta y+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}U_e^n\\&a_e=a_E+a_P+a_{ne}+a_{se}\\&+\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\end{aligned}\qquad(۱۲)$$

با عنایت به شکل ۱ ، معادله (۱۲) به صورت زیر نیز قابل استفاده است.

$$\begin{aligned}&a_eU_e^{n+1}=\sum\left(a_{nbx}U_{nbx}^{n+1}\right)+b_x\\&+g\left(\eta_P-\eta_E\right)\Delta y\end{aligned}\qquad(۱۳)$$

ضرایب همسایه a_{nbx} اثر ترکیب جابجایی- پخش در وجوه حجم کنترل را وارد محاسبات می‌کند.
با معادله اندازه حرکت در راستای y نیز به طور مشابه رفتار شده است. عبارت منقطع شده معادله اندازه حرکت در جهت y به صورت زیر بدست آمده است.

$$\begin{aligned}&a_nV_n^{n+1}=\sum\left(a_{nby}V_{nby}^{n+1}\right)+b_y\\&+g\left(\eta_P-\eta_N\right)\Delta x\end{aligned}\qquad(۱۴)$$

عبارات a_n، a_{nby} و b_y به همان شیوه ارائه شده برای معادله اندازه حرکت در جهت y استخراج شده است که جهت اختصار از ذکر آنها خودداری می‌گردد.
در صورت مشخص بودن مقادیر η در میدان، معادلات اندازه حرکت قابل حل است. برای بدست آوردن مقادیر η معادله پیوستگی بر روی حجم کنترل $ne-nw-sw-se$ منقطع شده است. با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی معادله زیر بدست آمده است.

$$\left(U_e^{n+1}-U_w^{n+1}\right)\Delta y+\left(V_n^{n+1}-V_s^{n+1}\right)\Delta x=0\qquad(۱۵)$$

جهت جایگزینی مقادیر سرعت از معادلات (۱۳) و (۱۴) استفاده می‌شود. معادله (۱۳) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

$$U_e^{n+1} = \frac{\sum\left(a_{nbx}U_{nbx}^{n+1}\right)+b_x}{a_e} + g\left(\eta_P-\eta_E\right)\frac{\Delta y}{a_e} \quad (16)$$

سرعت کاذب $\hat{U}_e^{n+1}$ توسط رابطه (۱۷) تعریف می‌شود.

$$\hat{U}_e^{n+1} = \frac{\sum\left(a_{nbx}U_{nbx}^{n+1}\right)+b_x}{a_e} \quad (17)$$

همانطور که مشاهده می‌گردد $\hat{U}_e^{n+1}$ ترکیبی از سرعتهای همسایه U_{nbx}^{n+1} بوده و شامل مقادیر η نیست. با ترکیب معادلات (۱۶) و (۱۷) معادله (۱۸) حاصل می‌گردد.

$$U_e^{n+1} = \hat{U}_e^{n+1} + g\left(\eta_P-\eta_E\right)\frac{\Delta y}{a_e} \quad (18)$$

به طریق مشابه معادله (۱۹) از منقطع سازی معادله اندازه حرکت در جهت y بدست آمد.

$$V_n^{n+1} = \hat{V}_n^{n+1} + g\left(\eta_P-\eta_N\right)\frac{\Delta x}{a_n} \quad (19)$$

با جایگزینی معادلات (۱۸) و (۱۹) در معادله (۱۵) معادله زیر برای η استخراج شد.

$$\begin{aligned} &a_P\eta_P = a_E\eta_E + a_W\eta_W + a_N\eta_N + a_S\eta_S + b \\ &a_E = g\frac{\Delta y}{a_e}\Delta y \\ &a_W = g\frac{\Delta y}{a_w}\Delta y \\ &a_N = g\frac{\Delta x}{a_n}\Delta x \\ &a_S = g\frac{\Delta x}{a_s}\Delta x \\ &a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \\ &b = \left(\hat{U}_w-\hat{U}_e\right)\Delta y + \left(\hat{V}_s-\hat{V}_n\right)\Delta x \end{aligned} \quad (20)$$

از طرف دیگر، بدیهی است که برای میدان حدسی η^* و جایگذاری آن در معادلات (۱۳) و (۱۴) میدان سرعت غیر کامل بدست می‌آید که با U^* و V^* نشان داده می‌شود.

$$a_eU_e^{*n+1} = \sum\left(a_{nbx}U_{nbx}^{*n+1}\right)+b_x + g\left(\eta_P^*-\eta_E^*\right)\Delta y \quad (21)$$

$$a_nV_n^{*n+1} = \sum\left(a_{nby}V_{nby}^{*n+1}\right)+b_y + g\left(\eta_P^*-\eta_N^*\right)\Delta x \quad (22)$$

مقدار دقیق η طبق رابطه زیر برآورد شده است.

$$\eta = \eta^* + \eta' \quad (23)$$

η' میزان تصحیح η است. تصحیحات سرعت مربوطه نیز به روش مشابه معرفی می‌گردد.

$$U = U^* + U' \quad , \quad V = V^* + V' \quad (24)$$

با کسر معادله (۲۱) از معادله (۱۳) معادله زیر بدست آمده است.

$$a_eU_e' = \sum\left(a_{nbx}U_{nbx}'\right) + g\left(\eta_P'-\eta_E'\right)\Delta y \quad (25)$$

در این قسمت از عبارت $\sum\left(a_{nbx}U_{nbx}'\right)$ صرفنظر شده است و معادله (۲۵) به صورت معادله (۲۶) فرض می‌گردد. حذف عبارت مذکور باعث نیمه ضمنی شدن حل معادلات حاکم می‌شود. در جواب همگرا شده، میدان سرعت ستاره دار مربوط به η حتما در معادله پیوستگی صدق می‌کند، بنابراین جزییات ساخت معادله η' ربطی به صحت جواب همگرا شده ندارد [۹].

$$a_eU_e' = g\left(\eta_P'-\eta_E'\right)\Delta y \quad (26)$$

$$U_e' = g\left(\eta_P'-\eta_E'\right)\frac{\Delta y}{a_e} \quad (27)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

از معادلات (۲۴) و (۲۷) معادله تصحیح سرعت زیر استخراج می‌شود.

$$U_e = U_e^* + g(\eta'_P - \eta'_E)\frac{\Delta y}{a_e} \qquad (۲۸)$$

به طریق مشابه معادله تصحیح سرعت در جهت y مطابق معادله (۲۹) است.

$$V_n = V_n^* + g(\eta'_P - \eta'_N)\frac{\Delta x}{a_n} \qquad (۲۹)$$

با جایگذاری معادلات (۲۸) و (۲۹) در معادله (۱۵) معادله انفصال زیر برای η' بدست می‌آید.

$$a_P\eta'_P = a_E\eta'_E + a_W\eta'_W + a_N\eta'_N + a_S\eta'_S + b' \qquad (۳۰)$$

ضرایب a_S, a_N, a_W, a_E, a_P همانند ضرایب معرفی شده در معادله (۲۰) است. b' نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$b' = (U_w^* - U_e^*)\Delta y + (V_s^* - V_n^*)\Delta x \qquad (۳۱)$$

برای حل معادلات منقطع شده از الگوی SIMPLER استفاده شده است. در این روش ابتدا میدان سرعت حدس زده می‌شود. ضرایب معادله اندازه حرکت (معادلات(۱۳) و (۱۴)) محاسبه شده و با استفاده از آنها $\hat{U}^{n+1}$ و $\hat{V}^{n+1}$ را از معادلاتی مانند معادله (۱۷) با بکاربردن مقادیر سرعتهای همسایه بدست می‌آید. ضرایب معادله (۲۰) محاسبه شده و از حل آن میدان η تعیین می‌گردد. با بکار بردن η به عنوان η^*، معادله اندازه حرکت (۲۱) و (۲۲) حل شده و مقادیر U^* و V^* بدست می‌آید. با محاسبه b' و حل معادله (۳۰) مقادیر η' حاصل می‌گردد. میدان سرعت با استفاده از معادلات (۲۸) و (۲۹) تصحیح گشته و این مراحل تا همگرایی نهایی تکرار می‌شود. برای بررسی بیشتر در مورد الگوی SIMPLER می‌توان به مرجع [۹] مراجعه کرد. معادلات منقطع شده به روش A.D.I [2] حل گردیده است. معادله پیوستگی و اندازه حرکت در جهت y، به صورت ضمنی در راستای عرضی و معادله اندازه حرکت در جهت x، به صورت ضمنی در راستای طولی فرض می‌گردد. با اعمال معادلات منقطع شده برای هر المان، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات به صورت سه قطری تشکیل می‌گردد که نحوه حل آن در مرجع[۱۰] آمده است.

بعلاوه محققین روشهایی برای کاهش نوسانات حل مدلسازی دوبعدی استفاده می‌کنند که بعنوان مثال می توان به روش لزجت مصنوعی[۱۱] و روش T.V.D اشاره کرد[۱۲]. در این روشها پارامترهای مورد استفاده باعث ایجاد قیدهایی بین نقاط مجاور شده و منجر به هموار شدن گرادیانهای تیز در نتایج می‌گردد. بمنظور حذف نوسانات غیر واقعی و ناهمگرایی در نتایج، از تکنیک‌های ویژه‌ای استفاده می‌گردد. روشهای معمول جهت غلبه بر مشکلات مذکور لزجت مصنوعی، .T.V.D، مک کورمک، بالادست، multi-grid و ... است. در این روشها مساله قابل توجه اینست که با افزایش تعداد المانهای درگیر در منقطع سازی معادلات، نرخ همگرایی افزایش یافته و به تبع آن نوسان در نتایج کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال در منقطع سازی ترم انتقال در معادله یک بعدی، شیوه بالادست مرتبه ۳ تعداد ۴ المان درگیر است ولی در بالادست مرتبه ۱ فقط دو المان دخالت دارد. از آنجا که نوسان در نتایج مدلسازی یک‌بعدی کمتر دیده می‌شود، می‌توان از آن بعنوان تعدیل نتایج مدلسازی دوبعدی استفاده کرد. در این مقاله، بمنظور کاهش نوسان و افزایش همگرایی، پارامترهای جریان دوبعدی با متغیرهای جریان یک‌بعدی لینک شده است. نتایج مدلسازی یک‌بعدی از نرم‌افزار HEC-RAS استخراج گردیده است. فرض می‌گردد مدل یک‌بعدی معتبر با دقت مورد قبول استفاده گردد یا نتایج از رودخانه طبیعی برداشت شده باشد. اگرچه مدلسازی دوبعدی معمولا اطلاعات و جزییات بیشتری از رفتار جریان در نقاط مختلف در مقایسه با مدل یک‌بعدی ارائه می‌دهد اما این بدان معنا نیست که نتایج مدلسازی دوبعدی دقیق‌تر است. با حل معادلات جریان دوبعدی در پلان مولفه‌های سرعت در دو راستای عمود برهم و تراز

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

سطح آب در هر المان بدست می‌آید. همچنین تراز سطح آب و سرعت متوسط در هر مقطع با استفاده از مدل یک‌بعدی قابل محاسبه است. بمنظور تعدیل نتایج مدلسازی دوبعدی با استفاده از مدلسازی یک‌بعدی مراحل زیر انجام می‌پذیرد.

الف- تعدیل دبی: در روش ترکیبی پیشنهاد شده، تفاوت دبی عبوری محاسبه شده از مقطع در حالات یک‌بعدی و دوبعدی محاسبه می‌گردد.

$$q_i = \left| \left(\sum_{j=1}^{j_{y\max}} Q_{i,j_{2D}} \right) - \left(Q_{i_{1D}} \right) \right| \qquad (۳۲)$$

در این رابطه $Q_{i_{1D}}$ دبی مدل یک‌بعدی در مقطع i، $Q_{i,j_{2D}}$ دبی مدل دوبعدی در المان jمقطع i و $j_{y_{\max}}$ تعداد المان در مقطع عرضی i است. در صورتیکه مقدار q_i از دقت مورد نیاز بیشتر باشد نتایج مدلسازی دوبعدی تعدیل شده و معادلات حاکم دوباره حل می‌گردد. این روند تا رسیدن به دقت مورد نیاز ادامه دارد.

ب- تعدیل تراز سطح آب: علاوه بر موضوع فوق، در روش پیشنهاد شده، تفاوت تراز سطح آب محاسبه شده از مقطع در حالات یک‌بعدی و دوبعدی محاسبه می‌گردد.

$$h_i = \left| \left(\frac{1}{j_{y_{\max}}} \sum_{j=1}^{j_{y\max}} \zeta_{i,j_{2D}} \right) - \left(\zeta_{i_{1D}} \right) \right| \qquad (۳۳)$$

$\zeta_{i_{1D}}$ تراز سطح آب مدل یک‌بعدی در مقطع i، $\zeta_{i,j_{2D}}$ تراز سطح آب مدل دوبعدی در المان jمقطع i است. در صورتیکه مقدار h_i از دقت مورد نیاز بیشتر باشد نتایج مدلسازی دوبعدی تعدیل شده و معادلات حاکم دوباره حل می‌گردد. این روند تا رسیدن به دقت مورد نیاز ادامه دارد.

۴- واسنجی مدل

مطالعه الگوی گردش آب در بنادر رودخانه ها مستلزم بررسی جریان در بازشدگی و تنگ شدگی توام و ناگهانی رودخانه ها می‌باشد و مدلسازی هیدرودینامیکی گردابه های تشکیل شده در بعد از بازشدگی ناگهانی و گردابه های‌تشکیل‌شده در قبل و بعد از تنگ شدگی ناگهانی می‌تواند زمینه ساز مدلسازی رسوب در بندر رودخانه ها باشد. مطالعه بر روی الگوی جریان در بازشدگی ناگهانی در کانالها (Backward Facing Step) به صورت گسترده‌ای توسط پژوهشگران مختلف انجام یافته است.

برای تحقیق در مورد صحت عملکرد مدل تهیه شده به بررسی سرعت جریان در یک بازشدگی ناگهانی پرداخته شده است. بدین منظور نتایج مدل تهیه شده با نتایج مطالعات انجام شده توسط ینگ و همکاران مقایسه گردیده است. در شکل ۲ می توان شمای کلی از هندسه بازشدگی ناگهانی که مورد مطالعه قرار گرفته است را مشاهده کرد.

از مطالعات آقای ینگ و همکاران نتایج مدل SKE و مدل Spezial و مدل آزمایشگاهی ارائه شده است. تفاوت دو روش عددی مذکور در نحوه محاسبه تنش برشی در معادلات حاکم است. برای اطلاعات بیشتر می توان به مرجع شماره [۴] مراجعه کرد. به منظور واسنجی مدل تهیه شده، میدان هندسی بازشدگی کانال به صورت شکل ۳ برای مدل تعریف شده است. اعداد نشان داده شده در این شکل، بیان کننده تعداد المانهای در نظر گرفته شده در هر راستا می باشد.

در تمامی مدلها، بازشدگی ناگهانی مطابق شکل ۲ در نظر گرفته شده است که عدد رینولدز جریان در این مدلها ۳۷۰۰۰ می باشد. پارامتر طولی عدد رینولدز، طول بازشدگی در نظر گرفته شده است. شرط مرزی ورودی در بالادست جریان، دبی ثابت لحاظ گردیده و در پایین دست جریان گرادیان سرعت و گرادیان تراز سطح آب برابر صفر در نظر گرفته شده است.

برای نشان دادن نتایج تحلیل، در شکل ۳ مبدا مختصات در نقطه A مشخص شده است. محورهای X و Y نیز در این شکل نشان داده شده است. تعداد المانها در قسمت بازشدگی ناگهانی ۱۰ المان در نظر گرفته شده است. برای رسم نتایج، مجموع طول این ۱۰ المان با پارامتر H نشان داده شده است.

نمودار سرعت نسبی در عرض کانال از نتایج دو مدل SKE و Spezial ، و مدل آزمایشگاهی تهیه شده

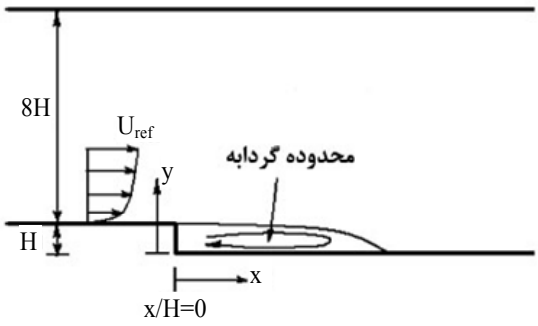
[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

توسط آقای ینگ و مدل تهیه شده در این تحقیق، در دو مقطع عرضی در شکل ۴ رسم شده است. این مقاطع به فاصله ۲ و ۵ برابر طول بازشدگی از محل بازشدگی می باشد. پارامتر Uref سرعت جریان در قبل از باز شدگی ناگهانی است.

همانطور که در شکل ۴ مشخص است، نتایج حاصل از مدل تهیه شده با مطالعات عددی و مدل آزمایشگاهی مطالعات ینگ و همکاران تطابق خوبی دارد و صحت عملکرد نرم افزار را تایید می کند. در شکل ۵ خطوط جریان محاسبه شده با استفاده از مدل تهیه شده ارائه گردیده است.

در بررسی های آقای ینگ و همکاران طول گردابه تشکیل شده در بعد از بازشدگی نیز مورد تحقیق بوده است [۴]. با توجه به این مطالعات ونتایج مدل تهیه شده در این پژوهش نسبت طول گردابه به طول بازشدگی مطابق جدول ۱ ارائه شده است.

طبق اطلاعات جدول ۱ و شکل ۴ دیده می شود، مدل تهیه شده در تخمین طول گردابه تشکیل شده در بعد از بازشدگی و محاسبه سرعت در مقاطع عرضی کانال موفق بوده است. با تایید صحت عملکرد مدل تهیه شده، می توان از این مدل برای بررسی جریان در بنادر رودخانه‌ای استفاده نمود. بدین منظور جریانهایی با اعداد رینولدز مختلف مورد تحلیل قرار گرفته‌اند و نتایج آن ارائه شده است.



شکل ۲- میدان هندسی بازشدگی ناگهانی مورد مطالعه درکانال

جدول ۱- نسبت طول گردابه به طول بازشدگی

نوع مدل	نسبت طول گردابه به عمق پله بازشدگی
SKE	۴/۹
Spezial	۵/۲
مطالعه حاضر	۶/۱
آزمایشگاهی	۶/۲۶

۵- مدلسازی بندر رودخانه

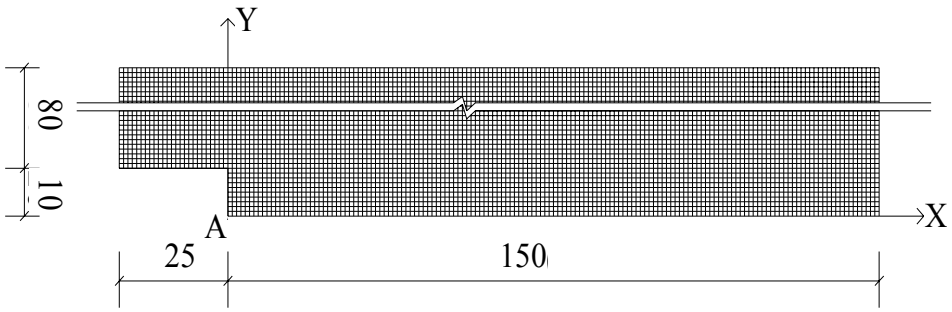
همانطور که گفته شد، مدلسازی جریان در بندر رودخانه از اهمیت خاصی برخوردار است. برای بررسی هیدرولیکی جریان از مدل تهیه شده در این پژوهش استفاده شده است. میدان هندسی کانال فرضی با حوضچه کناری به صورت شکل ۶ در نظر گرفته شده است. اعداد نشان داده شده در این شکل، بیان کننده تعداد المانها در هر راستا می باشد.

با توجه به تعداد المانها، نسبت طول بندر به عرض آن ۸ در نظرگرفته شده است. این نسبت از آنجا تعیین شده است که فضای کافی برای تشکیل گردابه‌ها در نقاط مختلف حوضچه وجود داشته باشد. از مدل تهیه شده برای تحلیل جریانهای با اعداد رینولدز ۲۰۰۰۰، ۲۵۰۰۰، ۳۰۰۰۰ و ۳۵۰۰۰ استفاده شده است. پارامتر طولی عدد رینولدز، طول بازشدگی در نظر گرفته شده است.

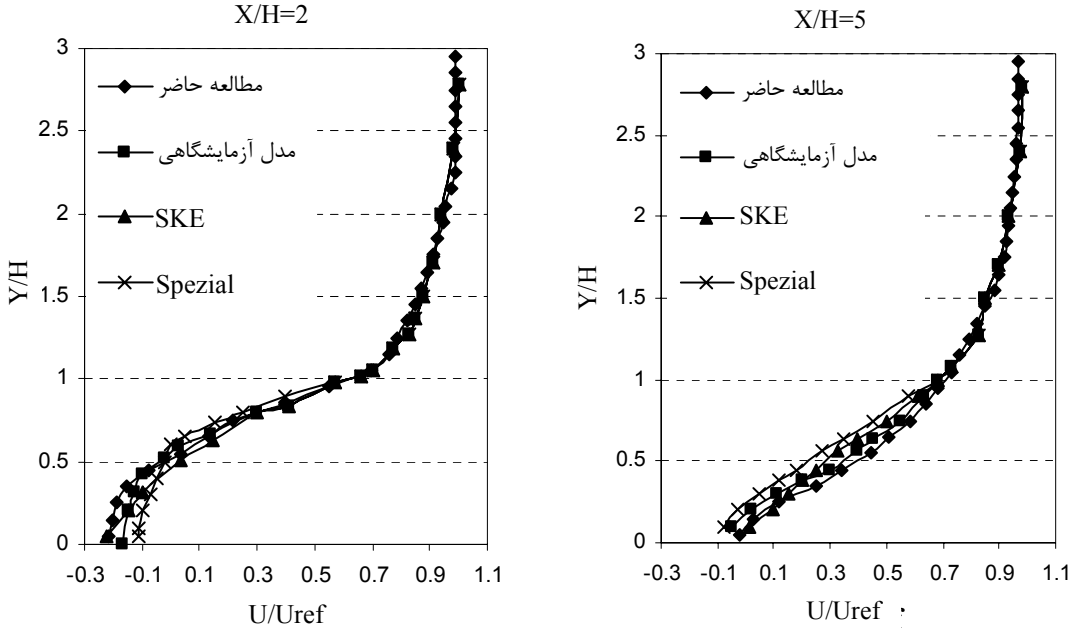
شرط مرزی ورودی در بالادست جریان دبی ثابت اعمال شده و در پایین دست جریان گرادیان سرعت و گرادیان تراز سطح آب برابر صفر درنظرگرفته شده است.

پس از اجرای مدل، در شکل ۷ تیپ خطوط جریان شکل گرفته با اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۷ مشخص است، در محدوده در نظر گرفته شده سه گردابه قابل تشخیص است. گردابه اول بعد از بازشدگی، گردابه دوم قبل از تنگ شدگی و گردابه سوم بعد از تنگ شدگی، تشکیل شده است. یکی از نکات قابل ذکر این است که جهت چرخش آب در تمامی گردابه‌ها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می باشد.

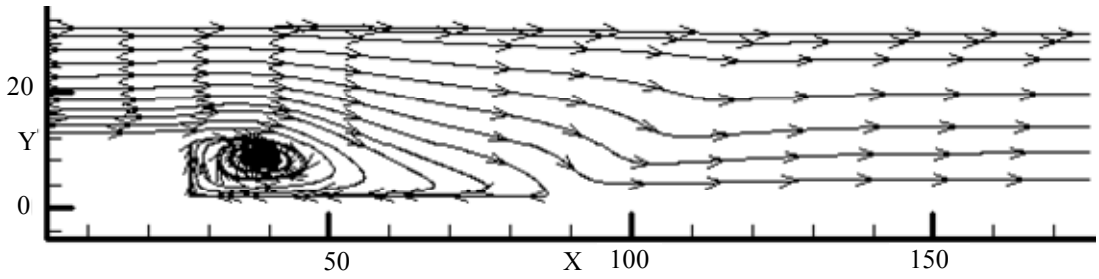
[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]



شکل ۳- تعداد المانها و هندسه پله معکوس(بازشدگی ناگهانی) مورد مطالعه در کانال



شکل ۴- نمودار سرعت نسبی در دو مقطع عرضی۲ =X/H و ۵ =X/H



شکل ۵- خطوط جریان محاسبه شده با استفاده از مدل تهیه شده

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

با در نظر گرفتن خروجیهای مدل تهیه شده، مقدار سرعت در مرکز و نقطه اتصال گردابه‌ها مانند نقطه اتصال نشان داده شده در شکل ۲ از نقاط دیگر میدان کمتر می باشد. در بین سه گردابه تشکیل شده نیز مرکز گردابه قبل از تنگ شدگی از سرعت کمتری برخوردار است. بنابراین می‌توان پیش بینی کرد که محل انباشت رسوب در این منطقه از سایر مناطق بیشتر خواهد بود. در شکل ۸ تیپ پروفیل سرعت در محل تشکیل گردابه‌ها رسم شده است.

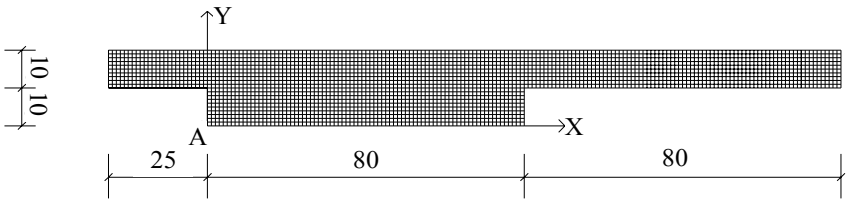
برای بررسی بهتر، جزییات گردابه تشکیل شده بعد از بازشدگی با اعداد رینولدز مختلف در شکل ۹ ، جزییات گردابه تشکیل شده قبل از تنگ شدگی با اعداد رینولدز مختلف در شکل ۱۰ و جزییات گردابه تشکیل شده بعد از تنگ شدگی با اعداد رینولدز مختلف در شکل ۱۱ نشان داده شده است. پارامتر H نشان داده شده در این اشکال بیان کننده طول بازشدگی می باشد.

در این شکلها طول گردابه برحسب طول بازشدگی بیان شده است. بعلاوه در شکل ۱۰ طول برگشت آب در پلان به موازات تنگ شدگی بر حسب طول بازشدگی نیز نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۹ و ۱۱ قابل مشاهده می باشد، با افزایش عدد رینولدز عرض گردابه ها چندان تغییر نمی کند اما طول آنها افزایش می یابد، در صورتیکه با توجه به شکل ۱۰ با افزایش عدد رینولدز هم عرض و هم طول گردابه تشکیل شده در قبل از تنگ شدگی افزایش می یابد.

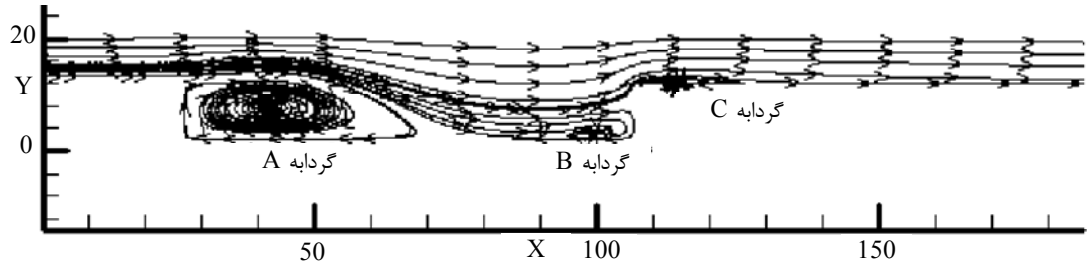
در شکل ۱۲ نمودارهای نسبت بدون بعد ابعاد گردابه‌ها به طول بازشدگی در برابر عدد رینولدز جریان رسم شده است. در این نمودارها پارامتر L_1 نسبت طول گردابه بعد از بازشدگی به طول بازشدگی، L_2 نسبت طول گردابه قبل از تنگ شدگی به طول بازشدگی، L_3 نسبت طول برگشت آب در پلان در قبل از تنگ شدگی و به موازات تنگ شدگی به طول بازشدگی، L_4 نسبت طول گردابه بعد از تنگ شدگی به طول بازشدگی می باشد. محور افقی در شکل ۱۲ عدد رینولدز می باشد که مقدار هزارگان آن در شکل نمایش داده شده است.

با توجه به نمودارهای رسم شده در این شکل تغییرات طول گردابه ها و عرض گردابه تشکیل شده در قبل از تنگ شدگی با تغییرات رژیم جریان رابطه خطی دارد که این تغییرات در شکل ۱۲ بیان شده است.

با توجه به رابطه‌های بیان شده در شکل ۱۲، می توان نتیجه گرفت که نرخ افزایش نسبتهای L_1 ، L_2 ، L_4 در برابر رینولدز بین ۳ تا ۳/۴ برابر نرخ افزایش L_3 در برابر رینولدز می باشد.

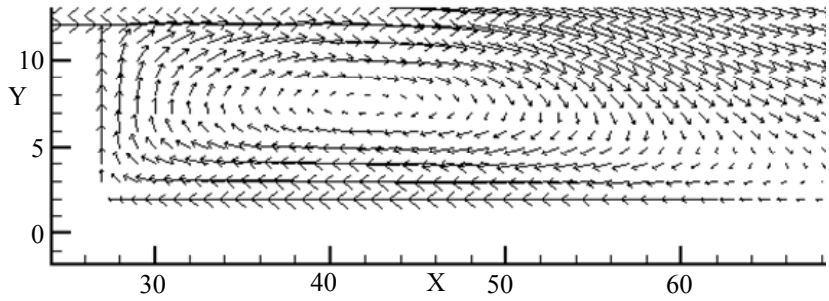


شکل ۶- تعداد المانها و هندسه حوضچه کناری مورد مطالعه

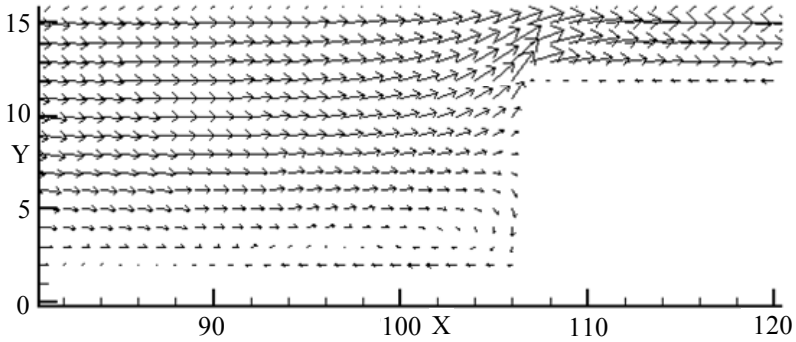


شکل ۷- تیپ خطوط جریان محاسبه شده برای جریانهایی با رینولدز بالا

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

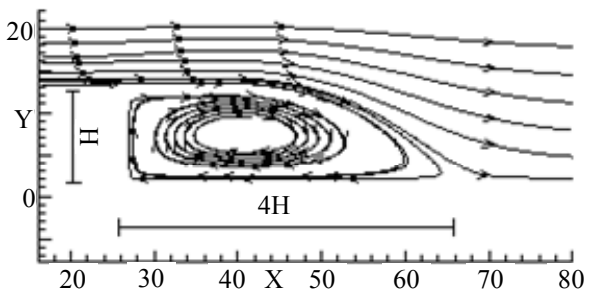


الف: گردابه بعد از بازشدگی

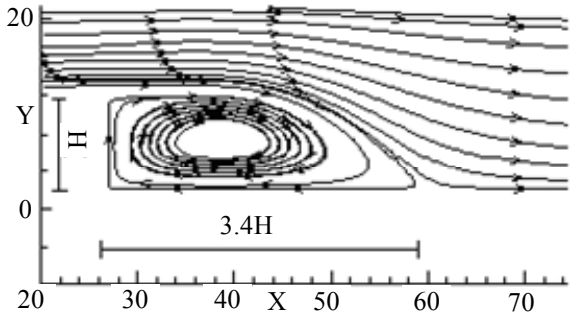


ب: گردابه های قبل و بعد از تنگ شدگی

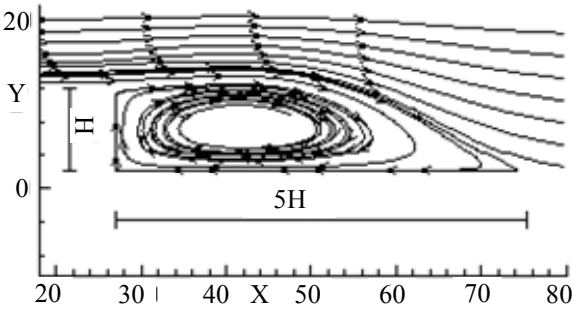
شکل ۸- تیپ پروفیل سرعت در محل تشکیل گردابه‌ها



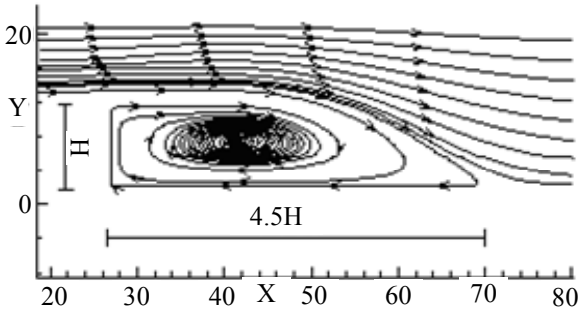
رینولدز = ۲۵۰۰۰



رینولدز = ۲۰۰۰۰



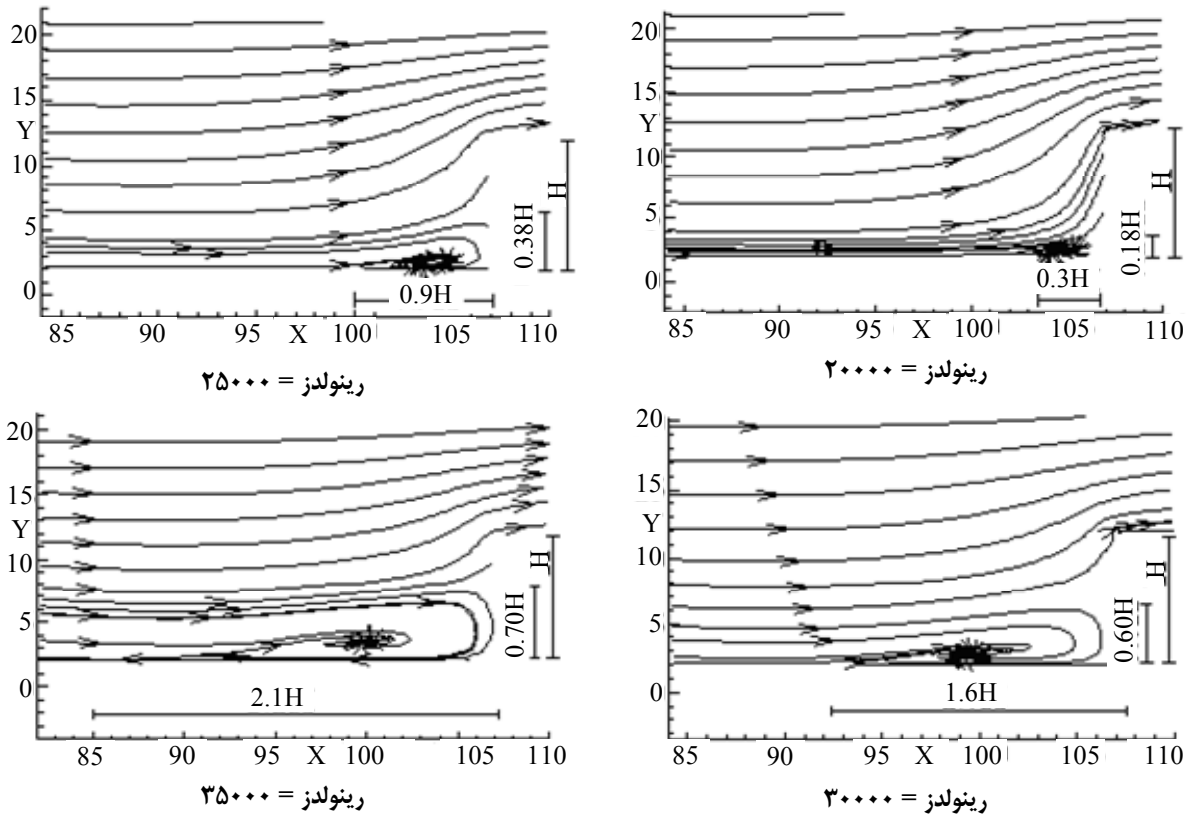
رینولدز = ۳۵۰۰۰



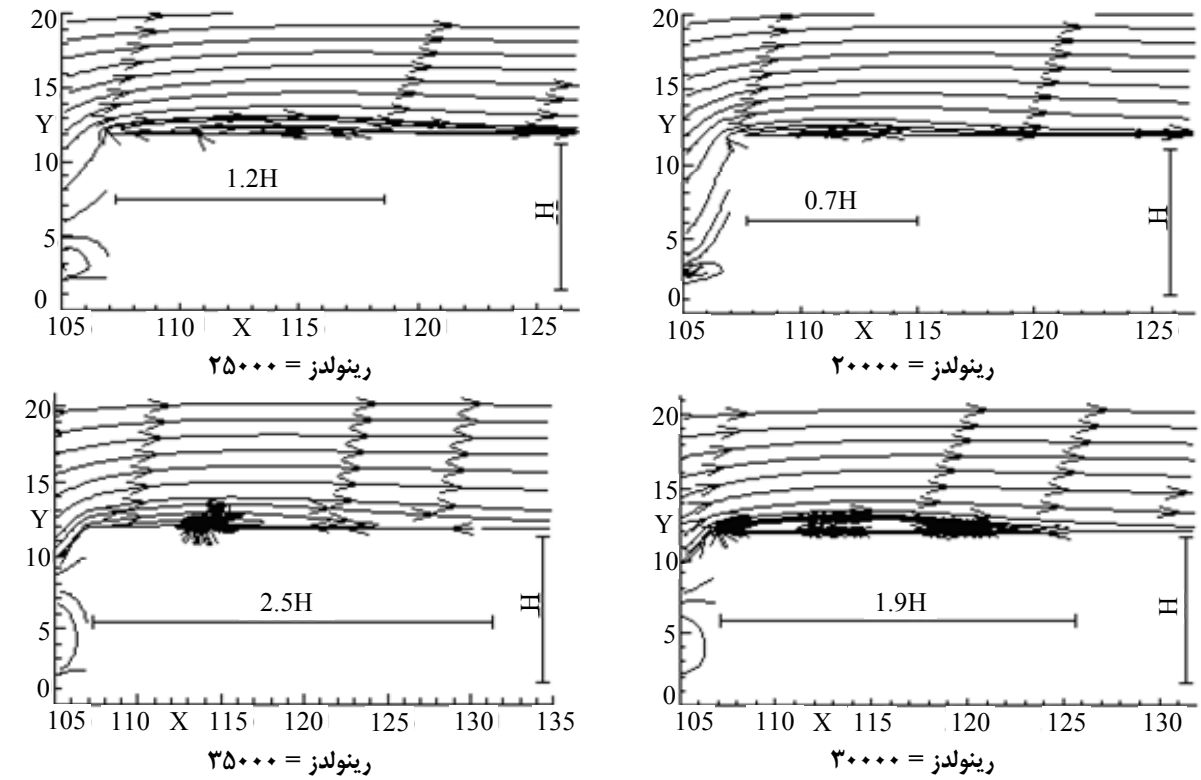
رینولدز = ۳۰۰۰۰

شکل ۹- جزییات گردابه تشکیل شده بعد از بازشدگی در محدوده A برای اعداد رینولدز مختلف

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]



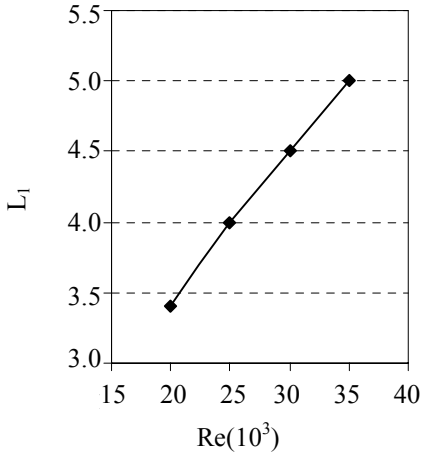
شکل ۱۰- جزییات گردابه تشکیل شده قبل از تنگ شدگی در محدوده B برای اعداد رینولدز مختلف



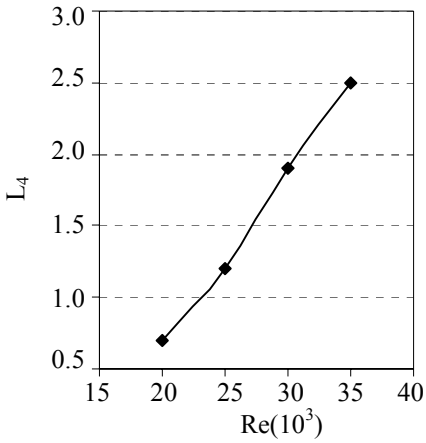
شکل ۱۱- جزییات گردابه تشکیل شده بعد از تنگ شدگی در محدوده C برای اعداد رینولدز مختلف

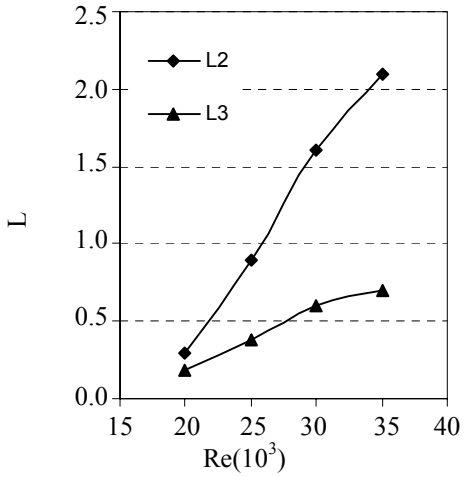
[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

$L_1=0.106(Re/1000)+1.31$



$L_4=0.122(Re/1000)-1.78$





$L2=0.122(Re/1000)-2.13$

$L3=0.0356(Re/1000)-0.514$

شکل ۱۲- نسبت ابعاد گردابه‌ها به طول بازشدگی در برابر عدد رینولدز

۶- جمع بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج برنامه‌ای که برای مدلسازی دو بعدی جریان در پلان رودخانه با استفاده از روش حجم کنترل و کاربرد الگوی SIMPLER تهیه شده، با نتایج مطالعات ینگ در بازشدگی ناگهانی کانالها واسنجی شده و ارائه گردیده است. جهت از بین بردن نوسانات و رسیدن به همگرایی بهتر، نتایج مدلسازی دوبعدی با نتایج مدلسازی یک بعدی مقایسه گردید و در صورت نیاز تعدیل شد. مدل تهیه شده برای شبیه سازی جریانهایی با اعداد رینولدز مختلف در بنادر رودخانه‌ای استفاده شده و نسبت ابعاد گردابه های تشکیل شده در منطقه بازشدگی و تنگ شدگی به طول بازشدگی جریان در راستای طولی و عرضی رودخانه محاسبه شده است. نتایج تحلیل نشان می دهد که جهت چرخش آب در تمامی گردابه‌ها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد و با افزایش عدد رینولدز جریان، طول گردابه های تشکیل شده نیز

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]

افزایش می یابد. با توجه به پروفیل سرعت بدست آمده مقدار سرعت در مرکز و نقطه اتصال گردابه‌ها از بقیه نقاط پایین‌تر است و می‌توان مشاهده کرد که، پایین‌ترین مقدار سرعت در مرکز گردابه تشکیل شده در قبل از تنگ‌شدگی می‌باشد و می‌توان انتظار داشت محل انباشت رسوب در این محدوده از بقیه بیشتر - باشد.

روابط و نمودارهای حاکم بر نسبت ابعاد گردابه ها و مشخصات جریان در متن مقاله ارائه شده اند که نشان می دهد تغییرات طول گردابه با تغییرات رژیم جریان عموما نسبت خطی دارد. بعلاوه نرخ افزایش نسبتهای L_1، L_2، L_4 در برابر رینولدز بین ۳ تا ۳/۴ برابر نرخ افزایش L_3 در برابر رینولدز می باشد و می‌توان نتیجه گرفت که رشد عرضی گردابه در قبل از تنگ‌شدگی نسبت به رشد طولی گردابه ها از نرخ کمتری برخوردار است.

کلید واژگان

1-Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised
2-Alternating Direction Implicit

۷- مراجع

1-Hakimzadeh, H. (2001), "Simulation of Circulation of Water in River Harbours Using the Zero-Equation Turbulence Model", Proceedings of 3th National Conference on Hydraulic Engineering, Tehran University, pp. 367-374. (In Persian)
2-Hakimzadeh, H. and Hafezizadeh, S. , (2003),"Numerical Modelling of secondary Circulation of Water in Rectangular River Harbours", Proceedings of 4th National Conference on Hydraulic Engineering, Shiraz University, Volume 1, pp. 695-702. (In Persian)
3-Kimura, I. & Hosoda, T., (1997), "Fundamental properties of flows in open channels with dead zone", Journal of hydraulic engineering, 123(2) , pp. 98-107.
4-Yang, X.D., Ma, H.Y. & Huang, Y.N., (2005) "Prediction of homogeneous shear flow and a backward-facing step flow with some linear and non-linear K–e turbulence models", Communications in Nonlinear Science and numerical Simulation, 10, pp. 315–328.
5-Chen, Y.T., Nie, J.H., Armaly, B.F. & Hsieh, H.T., (2006), "Turbulent separated convection flow adjacent to backward-facing step—effects of step height", International Journal of Heat and Mass Transfer, Article in press, Published on line 10 February.
6-Tofighi, M.A. & Zeinoldini, M. & Golshani, A.A. (2006) "Two-dimensional simulation of Urmia Lake hydrodynamics for indicating the flow regime," Journal of Marine Engineering.
7-Fischer, H.B., (1973) "Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open channel flow," Annual review of fluid mechanics, 5, pp.59-78.
8-Hoffmann, K.A., (1993), "Computational fluid dynamics for engineerings", Engineering Education System, 2nd edition.
9-Patankar, S.V., (1980), "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Publishing Corporation, U.S.A.
10-Koutitas, C.G., (1983), "Elements of computational hydraulics", Pentech Press, Plymouth.
11-Long, W. J. T. Kirby and Z. Shao (2008), "A numerical scheme for morphological bed level calculations", Coastal Engineering, Vol.55, p.167–180.
12-Delis, A.I. and Th. Katsaounis (2005), "Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods", Applied Mathematical Modelling, Vol.29, p. 754-783.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-20]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1388.5.10.3.3]