

توسعه یک روش عددی حجم محدود برای ارزیابی عملکرد هیدرودینامیکی سازه های دریایی

روزبه پناهی^۱، مهدی شافیعی فر^{۲*}

۱- دانش آموخته دکتری عمران - سازه های هیدرولیکی، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشیار سازه های هیدرولیکی و دریایی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مقاله، توسعه یک روش عددی به منظور ارزیابی عملکرد هیدرودینامیکی سازه های ساحلی و فراساحلی صلب ثابت یا متحرک، در جریان گذرای تک فازی یا دوفازی سیالات لزج و تراکم ناپذیر، با جزئیات ارائه شده است. برای این منظور، با انتخاب گسسته سازی حجم محدود و چیدمان هم مکان^۱، یک روش گام جزئی^۲ در حل میدان سرعت و فشار و یک روش حجمی^۳ در ارائه سطح آزاد پیاده شده است. دامنه محاسباتی دوبعدی، بر اساس رویکرد شبکه های روی هم^۴ - شامل یک شبکه زمينه^۵ غیریکنواخت کارتیزین و یک شبکه روافتاده^۶ از سلول های چهار وجهی - گسسته شده است. با توسعه کد بر اساس الگوریتم و حل مسائل نمونه، صحت و دقت رویکرد ارزیابی گردیده است. بدین ترتیب، یک روش عددی قوی در حل مسائل پیچیده هیدرودینامیک، همراه با قابلیت توسعه ساده به فضای سه بعدی معرفی شده است. بدین ترتیب، امکان بررسی مسائل هیدرودینامیکی در فضای دوبعدی فراهم آمده و بر این اساس، نیاز به توسعه کد به فضای سه بعدی وجود دارد. به علاوه، اثر آشفتگی باید اضافه شود. لازم به ذکر است که در انتقال تمامی متغیرهای میدان جریان دوفازی، از یک رویکرد ساده غیربقائی استفاده شده است. دستگاه معادلات جبری حاصل از شبکه های مختلف نیز، برای هر متغیر به صورت همزمان حل شده تا کوپل قوی بین شبکه ها برقرار شود. به علاوه، ترکیب اجزاء الگوریتم حاضر متفاوت با تحقیقات پیشین بوده و کارآمد می باشد. کلمات کلیدی: حجم محدود، هیدرودینامیک عددی، شبکه های روی هم، سطح آزاد، ضرایب برا و پسا

A FINITE VOLUME ALGORITHM TO ASSESS HYDRODYNAMICS OF MARINE STRUCTURES

Roozbeh Panahi¹, Mehdi Shafieefar²

1- Ph.D. Graduate, Civil Engineering Department, Tarbait Modares University

2- Associate Professor, Civil Engineering Department, Tarbait Modares University

Abstract

Development of a compatible computational fluid dynamics procedure to investigate rigid and fixed/free coastal and offshore structures hydrodynamics in a time-dependent one/two phase flow of viscous incompressible fluids is presented. Differential governing equations are discretised using finite volume approach based on a colocated arrangement. The conservation equations for mass and momentum are solved using a fractional step method. In conjunction, free surface is simulated using a volume method. An overlapping mesh system is implemented to deal with a two-dimensional computational domain including a non-uniform background mesh of Cartesian cells as well as an overset mesh of quad cells. According to the complete assessment of the code developed based on the algorithm, there is a

* نویسنده مسوول مقاله shafiee@modares.ac.ir

robust tool to deal with hydrodynamics where extension to three dimensions is straightforward, as well. Although many two-dimensional problems can be solved, but the code must be developed for three dimensions. In addition, turbulence is not considered in the present formulation and left for future researches. A simple non-conservative approach to transfer all two-phase flow variables is introduced. Besides, Algebraic sets of equations extracted from different meshes for each variable are solved simultaneously to construct a strong coupling. The final algorithm is a new and appropriate combination, as well.

Keywords: Finite Volume, Numerical Hydrodynamics, Overlapping mesh, Free Surface, Lift and Drag Coefficients

۱- مقدمه

بر جریان پتانسیل و مبتنی بر جریان واقعی تقسیم نمود. نتیجه استفاده از مفهوم جریان پتانسیل، نرم افزارهایی با سرعت بالا - با توجه به صرف نظر از پیچیدگی های درون میدان محاسباتی و کار بر روی مرزها - و همچنین محدودیت در کاربرد - بواسطه فرضیات ساده کننده - است. در مقابل، اگرچه استفاده از مفهوم شبیه سازی جریان واقعی - همراه با لزجت، چرخش و آشفتگی - با هزینه بالای محاسباتی همراه می باشد، اما جواب های دقیق تر و کاربرد گسترده تر، بر مقبولیت آن افزوده است.

این مقاله، با انتخاب گسسته سازی حجم محدود - با توجه به ماهیت جریان، خاصیت بقایی، نحوه برخورد با هندسه های پیچیده و گسترش و تداوم استفاده از این روش گسسته سازی به منظور بررسی مسائل هیدرودینامیکی - به توسعه الگوریتم شبیه سازی مسائل هیدرودینامیکی همراه با اندرکنش سازه صلب ثابت یا متحرک و جریان دوفازی در فضای دوبعدی اختصاص دارد.

در آغاز توسعه چنین الگوریتمی، باید تصمیم گیری های اساسی در رابطه با نحوه محاسبه میدان سرعت و فشار، شبیه سازی سطح آزاد و نیز محاسبه و اعمال اثر حرکات سازه صلب بر دامنه محاسباتی انجام شود.

با فرض وجود سیالات لزج و غیر قابل تراکم و همچنین صرف نظر از اثر آشفتگی، معادلات ناویر-استوکس بیانگر جریان حاکم در مسأله حاضر هستند. سه روش اصلی برخورد با این معادلات در حل غیر همزمان (متوالی) آنها شامل تخمین - اصلاح^۷، تراکم پذیری مصنوعی^۸ و گام جزئی می شود. تحقیق حاضر از رویکرد آخر به دلیل کارایی آن در حل مسائل گذرا استفاده نموده است [۱].

بررسی های هیدرودینامیکی با توجه به ماهیت پیچیده جریان و اندرکنش آن با سازه، همواره با دشواری های فراوانی همراه بوده و با توجه به اهمیت موضوع، روش های مختلفی در این زمینه توسعه یافته است. این رویکردها را می توان در چهار دسته اصلی اندازه گیری میدانی، انجام آزمایش، حل تحلیلی و حل عددی جای داد. اندازه گیری میدانی ساده ترین آنها بوده و عدم امکان استفاده در مراحل طراحی، بزرگترین ضعف آن محسوب می شود. اگرچه انجام آزمایش قابل اعتمادترین رویکرد محسوب می شود، اما مواردی همچون نیاز به اعمال تغییرات بر روی سازه نمونه ساخته شده به منظور بررسی اثر مؤلفه های مختلف طراحی، فراهم آوردن شرایط محیطی دلخواه، تحلیل و انتقال نتایج بدست آمده به ابعاد واقعی، برداشت اطلاعات و خطای اندازه گیری، از جمله مشکلات آن می باشند. هزینه های سنگین اولیه برای انجام آزمایش های دقیق را نیز می توان به موارد فوق افزود. معادلات حاکم بر جریان سیال، با پیچیدگی های فراوانی همراه بوده و امکان حل تحلیلی آنها - جز در مسائل بسیار ساده - وجود ندارد. از سوی دیگر، با بالا رفتن توان تئوری و محاسباتی، حل عددی معادلات حاکم و دینامیک سیالات محاسباتی، به عنوان یک ابزار مناسب - به ویژه در سال های اخیر - مطرح گردیده است. بدین ترتیب، امکان شبیه سازی مسائل مختلف مطرح در هیدرودینامیک در ابعاد واقعی و توانایی استخراج اطلاعات گوناگون با جزئیات دلخواه، به گونه مناسبی فراهم آمده است، هرچند همواره ساده سازی هایی نیز انجام شده است. روشهای مطرح در دینامیک سیالات محاسباتی را می توان به دو دسته کلی مبتنی

پس از معرفی معادلات اساسی حاکم در بخش دوم، جزئیات گسسته سازی معادلات حاکم در بخش سوم طرح گردیده است. سپس، نحوه پیاده سازی روش شبکه های روی هم مورد بحث قرار گرفته است. بخش پنجم به برقراری ارتباط میان بخش های مختلف الگوریتم اختصاص دارد. در انتها و به کمک کد توسعه یافته، جوانب مختلف الگوریتم مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۲- معادلات اساسی حاکم

همانگونه که پیشتر نیز بیان گردید، با توجه به تغییر شکل های پیچیده سطح آزاد، تحقیق حاضر از رویکرد حجمی شبیه سازی سطح آزاد و حل یک معادله انتقال در این زمینه استفاده نموده است. با محاسبه توزیع دو فاز سیال، می توان فرض نمود که یک سیال مؤثر در کل دامنه محاسباتی وجود دارد. بدین ترتیب، معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی برای یک سیال مؤثر تراکم ناپذیر و لزج، همراه با لزجت و جرم حجمی متغیر در سلول های مختلف دامنه محاسباتی، حل می شوند. معادله انتقال نسبت حجمی (α) و نحوه محاسبه جرم حجمی (ρ) و لزجت (ν) سیال مؤثر در هر سلول محاسباتی به صورت زیر می باشند:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_{eff} = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \quad (2)$$

$$\nu_{eff} = \alpha \nu_1 + (1 - \alpha) \nu_2 \quad (3)$$

در این روابط، u_i مؤلفه کارتزین سرعت سیال، x_i مؤلفه کارتزین مکان و زیر نویس های ۱ و ۲ بیانگر دو فاز سیال (برای مثال آب و هوا) است. معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی برای سیال مؤثر یاد شده، عبارتند از:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{eff}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu_{eff} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \quad (4)$$

رویکردهای اصلی موجود در شبیه سازی سطح آزاد شامل رویکرد سطحی یا تعقیب سطح آزاد^۹ و رویکرد حجمی یا تسخیر سطح آزاد^{۱۰} می باشند. با توجه به مزایا و معایب روش های مختلف [۲] و همچنین نیازهای مسأله پیش رو (جریان دوفازی آب و هوا با تغییر شکل های بزرگ و پیچیده در فصل مشترک دو فاز)، تحقیق حاضر از روش حل معادله انتقال نسبت حجمی^{۱۱} در رویکرد دوم استفاده نموده است [۲]. نسبت حجمی اسکالری بین صفر و یک بوده و مقدار آن، بیانگر درصد حضور دو فاز در هر سلول محاسباتی است.

در نظر گرفتن حرکات سازه نیاز به استراتژی خاصی در شبکه بندی دامنه محاسباتی داشته و رویکرد های اصلی مطرح در این زمینه شامل شبکه متصل به جسم^{۱۲} [۳]، شبکه شکل پذیر^{۱۳} [۴]، شبکه با مرز لغزنده^{۱۴} [۵]، باز تولید شبکه^{۱۵} [۶]، شبکه های روی هم [۷] و شبکه کارتزین^{۱۶} [۸] می باشند. مزایا و معایب روش های یاد شده، در مرجع [۹] مرور گردیده است. از آنجائیکه که تحقیق حاضر در مسیر توسعه یک نرم افزار جامع شبیه سازی هیدرودینامیکی سازه های ساحلی و فراساحلی انجام شده است، پس از بکارگیری روش شبکه متصل به جسم در گام های پیشین [۳]، از روش شبکه های روی هم - با توجه به مزایای متعدد آن - استفاده گردیده و آخرین نتایج آن ارائه شده است. لازم به ذکر است، در مواردی مثل برخورد استوانه با سطح آزاد آب، که حرکات آزاد سازه^{۱۷} (حداکثر سه درجه آزادی در فضای دوبعدی) مطرح می باشند، نیاز به حل معادلات اندازه حرکت خطی و زاویه ای نیز در هر گام زمانی و پس از محاسبه بارهای وارد بر سازه، وجود خواهد داشت. بدین ترتیب، موقعیت جدید سازه بدست آمده و در ادامه، از استراتژی شبکه بندی مورد بحث به منظور اعمال اثر حرکات سازه استفاده می شود. بدیهی است، در موارد همراه با حرکات اجباری سازه^{۱۸} نیازی به حل معادلات حرکت جسم صلب وجود ندارد. زیرا، در این حالت موقعیت سازه مستقل از شرایط جریان اطراف آن معلوم است. بر این اساس، حرکات سازه در هر گام زمانی به صورت مستقیم بر روی استراتژی شبکه بندی وارد می شود.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

در این روابط، P فشار و g_i مؤلفه کارتزین گرانش می باشند.

۳- گسسته سازی و حل میدان جریان دوفازی

با توجه به روش شبکه بندی و وجود شبکه متحرک در دامنه محاسباتی، معادلات دیفرانسیلی حاکم در شکل لاگرانژی - اولری مورد استفاده قرار می گیرند. پس از انتگرال گیری در مکان و استفاده از قضیه گوس^{۱۹} - برای تبدیل انتگرال روی سطح به انتگرال روی حجم - معادلات فوق به صورت زیر در می آیند:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_{eff} dV + \int_A \rho_{eff} \mathbf{u}_{rel} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V u_i dV + \int_A u_i (\mathbf{u}_{rel} \cdot \mathbf{n}) dA = \\ - \int_A \frac{1}{\rho_{eff}} P n_i dA + \int_A \nu_{eff} \nabla u_i \cdot \mathbf{n} dA \\ + \int_V g_i dV \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \alpha dV + \int_A \alpha \mathbf{u}_{rel} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (8)$$

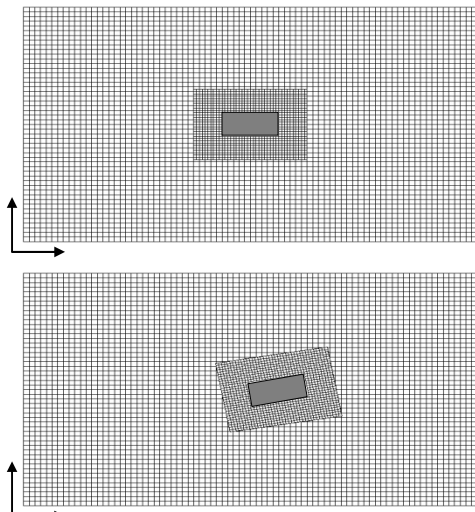
که در آنها، $\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_m$ بیانگر بردار سرعت سیال (\mathbf{u}) نسبت به بردار سرعت شبکه محاسباتی (\mathbf{u}_m) بوده و \mathbf{n} بردار عمود بر سطح سلول محاسباتی به سمت خارج از آن است.

معادلات (۶) و (۷) در قالب حل میدان سرعت و فشار و بر اساس روش گام جزئی کیم و چوی^{۲۰} حل شده اند، با این تفاوت که در گسسته سازی زمانی جملات جابجایی و پخش، به جای طرح آدامز - بشفرت^{۲۱} از طرح کرنک - نیکلسون^{۲۲} استفاده گردیده است. به علاوه، در خطی سازی جمله جابجایی نیز به جای روش نیوتنی از تکرار پیکارد^{۲۳} استفاده شده است. این روش گام جزئی، در مرجع [۱۰] به صورت فلوچارت ارائه شده است. به منظور گسسته سازی مکانی جمله غیر دائم معادله انتقال اندازه حرکت خطی (عبارت اول

سمت چپ معادله (۷)) از ساده ترین تقریب ممکن استفاده گردیده و مقدار کمیت در مرکز سلول، به عنوان نماینده سلول در نظر گرفته شده است. جمله جابجایی (عبارت دوم سمت چپ معادله (۷)) نیز، با استفاده از میانبایی گاما^{۲۴} تقریب زده شده است [۱۱]. در رابطه با گسسته سازی جمله فشار - با توجه به حضور سطح آزاد و به ویژه اختلاف جرم حجمی بالای دو فاز سیال مورد بررسی مثل آب و هوا - از میانبایی جدید دو تکه استفاده شده است، که جزئیات بیشتر در این رابطه در مرجع [۱۰] وجود دارد. جمله پخش (عبارت دوم سمت راست معادله (۷)) با استفاده از میانبایی اور-ریلکسد^{۲۵} محاسبه شده است [۱۱]. در نهایت، با جمله گرانش نیز مشابه جمله غیردائم برخورد شده است.

گسسته سازی جمله غیردائم معادله انتقال نسبت حجمی (معادله (۸)) نیز مشابه جمله غیر دائم معادله (۷) است. در گسسته سازی زمانی این جمله، میانبایی ضمنی مرتبه اول اولر^{۲۶} بکار برده شده است. تقریب نسبت حجمی روی سطح ظاهر شده در گسسته سازی جمله جابجایی معادله (۸)، نیازمند توجه خاصی می باشد. استفاده از میانبایی های ساده در این رابطه، معمولاً مقادیر غیر فیزیکی بوجود آورده و باعث تغییر شکل های غیر واقعی و پخش عددی سطح آزاد می شوند. با توجه به بررسی های انجام شده [۲]، تحقیق حاضر از میانبایی کیکسم^{۲۷} استفاده می نماید. این میانبایی با جابجایی بین دو طرح سی بی سی^{۲۸} [۱۲] و یو کیو^{۲۹} [۱۳]، ترکیبی از آن دو را برای محاسبه نسبت حجمی روی سطح ارائه می دهد. در گسسته سازی زمانی این جمله نیز از میانبایی کرنک - نیکلسون استفاده گردیده است. در واقع، تحقیقات پیشین نشان داده است که بکارگیری میانبایی ضمنی مرتبه اول در این رابطه، منجر به پخش عددی در جهت جریان و میانبایی صریح مرتبه اول منجر به پخش عددی عمود بر جریان می شوند [۲].

لازم به ذکر است که تمامی گسسته سازی های مکانی یاد شده، بر روی سلول چهار وجهی پیاده شده و در ذخیره اطلاعات از چیدمان هم مکان استفاده گردیده



شکل ۱- نمایش دامنه محاسباتی در دو گام زمانی متوالی با استفاده از روش شبکه های روی هم

۴-۱- تعیین هویت سلول ها

تعیین ماهیت سلول های موجود در شبکه های محاسباتی با توجه به نقش آنها در محاسبات مطابق موارد زیر انجام می شود:

الف) سلول گسسته سازی که معادلات حاکم در آن به صورت معمول گسسته می شود.

ب) سلول میانمایی که جابجایی اطلاعات بین شبکه ای در آن انجام می شود.

ج) سلول غیر فعال که در زمان انجام محاسبات از آن صرف نظر می شود.

لازم به ذکر است که در شبکه روافتاده، سلول غیر فعال وجود ندارد. در این شبکه، سلول های مجاور مرز از نوع میانمایی بوده و بقیه سلول ها از نوع گسسته سازی می باشند. اما در رابطه با شبکه زمينه، تعیین ماهیت سلول ها نیازمند استفاده از یک الگوریتم مناسب است. چنین الگوریتمی در شکل ۲ ارائه شده است. در این شکل، ضخامت لایه انتقال اطلاعات (δ_0) - که از مرز شبکه روافتاده اندازه گرفته می شود - وابسته به ابعاد سلول ها در محدوده اشتراک بوده و باید به اندازه ای باشد که تعداد مناسبی سلول شبکه زمينه را در بر گیرد.

است. در این شرایط، تمامی کمیت های اصلی جریان در مرکز سلول محاسبه شده و تنها شار جابجایی بر روی سطوح سلول محاسبه و ذخیره می گردد.

۴- روش شبکه های روی هم

روش شبکه های روی هم، نخستین بار در سال ۱۹۸۱ و به منظور تسهیل شبکه بندی دامنه محاسباتی مورد استفاده قرار گرفت [۱۴]. در ادامه، کاربرد آن به مدلسازی حرکات نسبی اجباری [۱۵] و مسائل آیرودینامیک [۱۶] گسترش یافت. هیدرودینامیک - با توجه به پیچیدگی های فراوان پیش رو - تنها در کارهای اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱۷]. زمینه تحقیقات انجام شده با استفاده از روش شبکه های روی هم، در جدول ۱ ارائه و دسته بندی شده است.

اساس استفاده از روش شبکه های روی هم در شکل ۱ و با نمایش دامنه محاسباتی در دو گام زمانی متوالی ارائه شده است. همانگونه که مشاهده می شود، این روش در ساده ترین حالت، از دو شبکه زمينه - که ثابت است - و روافتاده - که با توجه به حرکت سازه می تواند ثابت یا متحرک باشد - تشکیل شده است. اگرچه شبکه زمينه تمام دامنه محاسباتی را پوشش داده است، اما در محدوده شبکه روافتاده، با توجه به کیفیت مناسب تر آن، محاسبات تنها بر روی آن انجام می شود. بر این اساس، نیاز به انتقال اطلاعات در بین شبکه ها و برقراری کوپل مناسب میان آنها وجود دارد. این مسأله مشکل اساسی روش شبکه های روی هم می باشد. زیرا تحقق بقاء کمیت ها در هنگام انتقال بین شبکه ها بسیار دشوار است.

تحقیقات نشان داده است که در بسیاری از موارد می توان از بقاء کمیت ها صرف نظر نمود [۷].

این مسأله، در تحقیق حاضر و با توجه به استفاده از یک میانمایی غیربقائی ساده و حصول نتایج مناسب، مورد تأیید قرار گرفته است. روش مورد استفاده در تحقیق حاضر شامل سه بخش مجزا بوده و در ادامه برای یک شبکه زمينه و یک شبکه روافتاده در فضای دوبعدی تشریح شده است.

$$\kappa = \frac{\rho_B \delta_B}{\rho_A \delta_A + \rho_B \delta_B} \quad (12)$$

که در این روابط، A و B بیانگر دو سلول همسایه و δ نشانه فاصله بین مرکز سطح مورد نظر و مرکز سلول می باشند.

۴-۳- حل معادلات جبری

دو راه اصلی در حل دستگاه معادلات جبری حاصل از گسسته سازی بر روی شبکه های محاسباتی - که در روش شبکه های روی هم با یکدیگر مرتبط می باشند - عبارتند از:

الف) حل متوالی یا رفت و برگشت بین دستگاه معادلات جبری شبکه های مختلف
 ب) حل همزمان

با توجه به آنکه اطلاعات جابجا شده در بین شبکه ها در روش نخست به اندازه یک تکرار خارجی با یکدیگر اختلاف دارند، نیاز به ضرایب تخفیف کوچک تر و تعداد تکرار بیشتری به منظور رسیدن به همگرایی وجود خواهد داشت. این روش، پیوستگی میدان فشار در تمامی دامنه محاسباتی را نیز دچار مشکل می نماید. بر این اساس، تحقیق حاضر از روش دوم استفاده نموده است. بدین منظور، یک ماتریس ضرایب کلی - که در برگیرنده تمامی سلول های محاسباتی است - تشکیل می شود. در آغاز، تمامی معادلات ساخته شده و در ادامه، شماره سلول ها شبکه روافته بازسازی شده و به اندازه تعداد سلول های شبکه زمینه به تمامی آنها اضافه می شود.

حال، فرض کنید که A و B ، به ترتیب بیانگر شبکه زمینه و شبکه روافته باشند. معادله حاکم بر یک سلول گسسته سازی (سلول D) در حالت کلی به صورت زیر قابل بیان است:

$$a_{D-A} \varphi_{D-A} = \sum_{\text{ngb=neighbor CVs in } A \text{ mesh}} a_{\text{ngb}-A} \varphi_{\text{ngb}-A} + S_{D-A} \quad (13)$$

در این سطح نیز، به عنوان سلول حاضر بعدی انتخاب می گردد. این عمل تا زمانی که ضرب خارجی فوق در تمامی سطوح یک سلول منفی شود ادامه می یابد. چنین سلولی، سلول میزبان نام داشته و مرکز سلول میانبایی را در خود جای داده است. چنین الگوریتمی برای حالت سه بعدی نیز برقرار بوده و به راحتی قابل پیاده سازی می باشد. در شرایطی که حرکت سازه کم باشد، انجام این عملیات در هر گام زمانی حجم کمی از محاسبات را به خود اختصاص خواهد داد زیرا حدس اولیه برای شروع محاسبات - با توجه به نتایج گام زمانی قبل - دقیق تر خواهد بود.

در تحقیق حاضر، مجموعه میانبایی شامل سلول میزبان و همسایه های درجه یک آن (چهار همسایه در حالت دوبعدی) بوده و نحوه برخورد با رابطه میانبایی، کاملاً ضمنی است. این رابطه، برای محاسبه کمیت جریان φ - که سرعت ها، فشار و نسبت حجمی را در بر می گیرد - به صورت زیر بیان می گردد:

$$\varphi_I = \varphi_H + (\bar{\nabla} \varphi)_H \cdot (\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_H) \quad (9)$$

که در این رابطه، زیر نویس های I و H به ترتیب بیانگر سلول میانبایی و سلول میزبان بوده و \mathbf{r} بردار موقعیت این سلول ها می باشد. به علاوه، $(\bar{\nabla} \varphi)_H$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$(\bar{\nabla} \varphi)_H = \frac{1}{V_H} \sum_{f=\text{faces of the host cell on the donor mesh}} \varphi_f \mathbf{A}_f \quad (10)$$

که در این رابطه، V_H حجم سلول و \mathbf{A}_f بردار سطح سلول به سمت خارج آن می باشند. مقدار کمیت جریان بر روی سطح سلول بوده و در رابطه با تمامی کمیت ها به جز فشار با استفاده از میانبایی خطی محاسبه می گردد. در رابطه با فشار، از میانبایی خطی دو تکه به صورت زیر استفاده می گردد [۱۰]:

$$P_f = P_A \kappa + P_B (1 - \kappa) \quad (11)$$

که در آن:

که در آن $a_{IA-A} = 1$ بوده و φ_{IA-A}^* آخرین مقدار محاسبه شده برای این سلول می باشد. پس از تهیه معادلات مشابه برای شبکه B ، ساخت ماتریس کلی با توجه به شماره جدید سلول ها انجام می گردد.

۵- الگوریتم حل

شکل ۴ بیانگر نحوه ارتباط میان بخش های اصلی الگوریتم حاضر می باشد. همانگونه که مشاهده می شود، با استفاده از این الگوریتم می توان گستره وسیعی از مسائل با یا بدون سطح آزاد و همچنین با یا بدون حرکت سازه را حل نمود.

معادله حاکم بر یک سلول میانجی (سلول I) شبکه A را نیز - که بر اساس یک مجموعه میانجی در شبکه B ساخته می شود - می توان با توجه به شکل معادله (۱۳) و به صورت زیر بازنویسی نمود:

(۱۴)

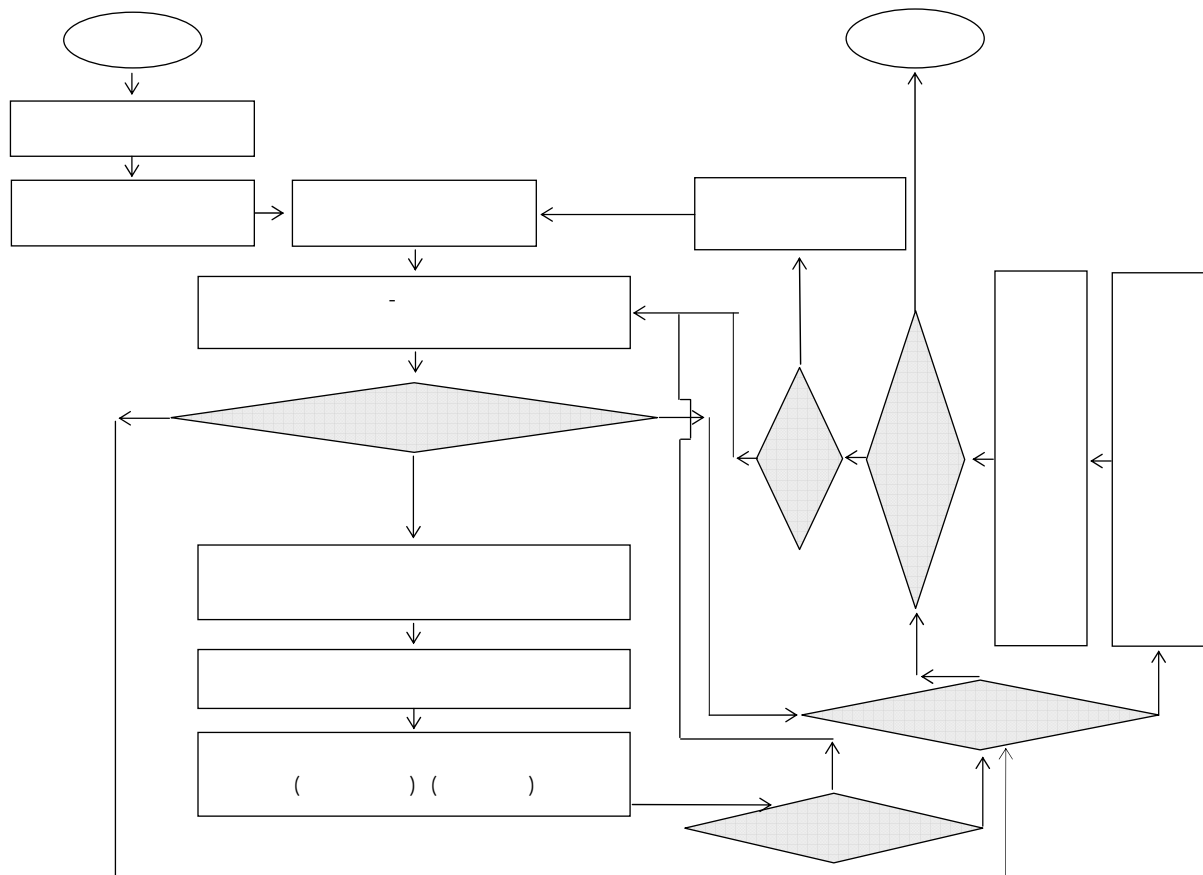
$$a_{I-A} \varphi_{I-A} = \sum_{\substack{\text{ngb}' = \text{host cell and its neighbor CVs} \\ \text{in B mesh}}} a_{\text{ngb}'-B} \varphi_{\text{ngb}'-B} + S_{I-A}$$

بدین ترتیب، سلول های میانجی نیز در دستگاه معادلات ظاهر شده و با آنها به صورت ضمنی برخورد می شود.

معادله حاکم بر یک سلول غیر فعال (سلول IA) در شبکه A نیز به صورت زیر بیان می شود:

(۱۵)

$$a_{IA-A} \varphi_{IA-A} = \varphi_{IA-A}^*$$

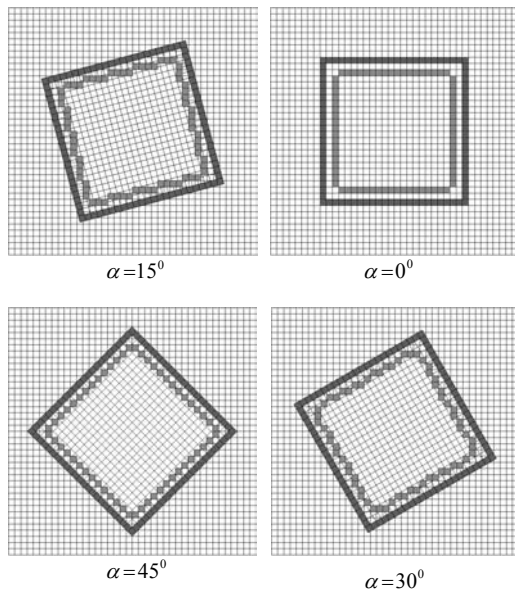


شکل ۴- الگوریتم حل عددی برای بررسی هیدرودینامیکی سازه های دریایی

۶- نتایج عددی

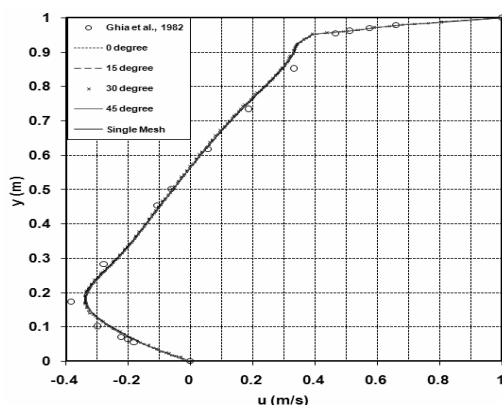
با توسعه یک کد بر اساس الگوریتم ارائه شده، مسائلی به منظور ارزیابی جنبه های مختلف روش عددی پیشنهادی، حل شده است. در گام نخست، جریان کاویتی بررسی گردیده است. بدین ترتیب، استقلال حل عددی از موقعیت شبکه روافتاده نسبت به شبکه زمینه و نیز استقلال حل نسبت به کیفیت شبکه، با نمایش پروفیل های سرعت مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، جریان حول استوانه که به صورت نامتقارن در یک کانال قرار دارد، مدل سازی شده و ضرایب برا، پسا، پروفیل سرعت و فشار استخراج گردیده است. در اینجا، اثر میانمایی بین شبکه ای بر روی دقت حل و نیز، پیوستگی میدان جریان تحلیل شده اند. در آخر، سقوط آزاد استوانه به درون آب - که پس از برخورد و با توجه به نیروی ضربه ای وارد بر آن، از سرعت استوانه کاسته می شود - مدل سازی شده است. بدین ترتیب، نحوه ارائه سطح آزاد با تغییرات بزرگ و پیچیده، علاوه بر حرکت آزاد سازه بررسی گردیده است.

تمامی سلول ها یکسان بوده و ضخامت لایه انتقال اطلاعات 0.04 m در نظر گرفته شده است.



شکل ۵- شبکه های روی هم در بررسی جریان کاویتی شامل شبکه زمینه 40×40 و شبکه روافتاده 24×24

شکل ۶ پروفیل سرعت u را در طول خط تقارن قائم کاویتی نشان می دهد که با نتایج موجود [۱۸] مقایسه گردیده است. همانگونه که مشاهده می شود، نتایج حاصل از شبکه های مختلف، به گونه مناسبی بر یکدیگر منطبق می باشند. به علاوه، نتایج عددی با داده های موجود اختلاف داشته و این مسأله با توجه به ریزنمایی پایین شبکه های روی هم، منطقی است.

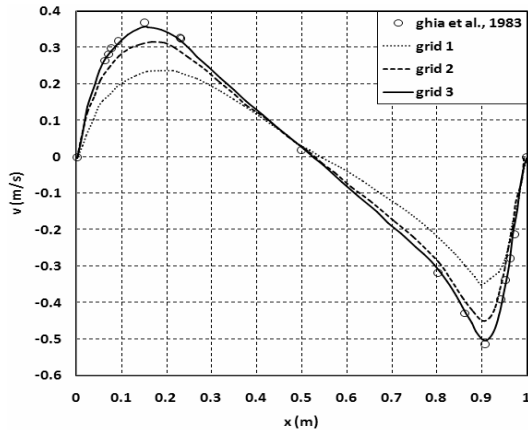


شکل ۶- پروفیل سرعت u در طول خط تقارن قائم کاویتی

۶-۱- جریان کاویتی

در اینجا جریان بدون گرانش کاویتی (جریان درون مربعی به ضلع H که سه ضلع آن ثابت بوده و یک ضلع آن با سرعت U در حال حرکت باشد) در نظر گرفته شده است. عدد رینولدز این جریان $Re = \rho U H / \mu = 1000$ تنظیم شده است. شرط مرزی عدم لغزش برای سرعت و گرادیان قائم صفر برای فشار در تمامی سطوح اعمال گردیده است. به منظور بررسی اثر موقعیت شبکه روافتاده نسبت به شبکه زمینه بر روی حل، چهار حالت شبکه مطابق شکل ۵ در نظر گرفته شده است. در این مسأله، به دلیل عدم وجود حرکت سازه، ماهیت سلول ها در طول مدل سازی مطابق آنچه در شکل ۵ نشان داده شده است باقی مانده و تغییر نمی کنند. لازم به ذکر است، سلول هایی از شبکه زمینه که در این شکل نشان داده نشده اند، در واقع سلول های غیرفعال این شبکه می باشند. اندازه

کاویتی با روند همگرایی منطقی و مرتبه دوم به داده های موجود نزدیک می شود، اگرچه به نظر می رسد که ریزترین شبکه مورد استفاده نیز هنوز به اندازه کافی ریز نبوده و نتایج به طور کامل منطبق نمی باشند.



شکل ۷- پروفیل سرعت v در طول خط تقارن افقی کاویتا

۶-۲- استوانه در جریان دائم غیر متقارن

استوانه ای به قطر D را در کانالی به طول $22D$ و عرض $4.1D$ در نظر بگیرید، به طوریکه مرکز آن به فاصله $2D$ از ورودی و دیوار پایینی کانال قرار دارد. مبدأ دستگاه مختصات xz در مرکز استوانه واقع شده و محور x به سمت طول استوانه و محور z به سمت دیوار بالایی کانال اشاره دارد. پروفیل سرعت جریان آرام کاملاً توسعه یافته، در ورودی کانال به صورت زیر اعمال شده است:

(۱۶)

$$u = \frac{6U}{H^2} \left[(z+2D)H - (z+2D)^2 \right]; w=0$$

به علاوه، گرادیان قائم صفر در خروجی و عدم لغزش در دیواره استوانه و کانال بر روی سرعت حاکم بوده و گرادیان قائم صفر برای فشار در تمامی سطوح در نظر گرفته شده است. مشخصات میدان جریان و سیال مورد استفاده نیز عبارتند از: $D=0.1m$ ، $U=0.2 \frac{m}{s}$ ، $\rho=1 \frac{kg}{m^3}$ و $\mu=0.001 \frac{kg}{ms}$. بدین ترتیب، عدد رینولدز جریان $Re = \rho U D / \mu = 20$ است. به منظور بررسی دقت گسسته سازی مکانی و اثر میانمایی

جدول ۲- نرم اول خطا با مقایسه مؤلفه سرعت u در نقاط داده شده توسط [Ghia et al., 1982]

با توجه به نتایج شکل ۶

نرم اول	نوع شبکه
۰/۰۷۹۴۰۲	زاویه ۰ درجه شبکه روافتاده
۰/۰۸۳۸۸۳	زاویه ۱۵ درجه شبکه روافتاده
۰/۰۸۳۸۴۵	زاویه ۳۰ درجه شبکه روافتاده
۰/۰۷۶۷۸۹	زاویه ۴۵ درجه شبکه روافتاده
۰/۰۷۸۹۴۳	شبکه ساده

همانگونه که پیش بینی می گردید، نرم اول خطا در شبکه های روی هم با زاویه صفر درجه شبکه روافتاده ($\theta=0$ در شکل ۵)، کم بوده و به شرایط استفاده از شبکه ساده بسیار نزدیک است. این مسأله، بواسطه انطباق کامل شبکه زمينه و شبکه روافتاده در این مجموعه شبکه های روی هم - و در نتیجه کاهش خطای میانمایی و احتمالاً کاهش خطای بقاء جرم - منطقی به نظر می رسد. اما، مشاهده می شود که مقدار نرم اول خطا با استفاده از مجموعه شبکه های روی هم در شرایط ۴۵ درجه شبکه روافتاده، از حالت صفر درجه شبکه روافتاده و حتی یک شبکه ساده نیز کمتر بوده و این مسأله، منطقی به نظر نمی رسد. اگرچه، شرایط انطباق سلول های میانمایی و میزبانانشان در شرایط $\theta=45$ شکل ۶-۵، مناسب تر از حالت های $\theta=15$ و $\theta=30$ درجه بوده و در نتیجه، خطای استفاده از روش میانمایی اطلاعات در آن کمتر است، اما مشکل خطای بقاء جرم همچنان باید برقرار باشد. در این خصوص، می توان این احتمال را در نظر گرفت که نحوه توزیع خطا ناشی از بقاء جرم در شرایط $\theta=45$ به صورت شانسی منجر به استخراج نتایج بهتر گردیده است.

استقلال حل از شبکه بندی دامنه محاسباتی در گام بعدی و با استفاده از شبکه بندی روی هم در زاویه ۴۵ درجه و سه سطح ریز نمایی، بررسی شده است. شبکه درشت شامل 20×20 سلول در شبکه زمينه و 12×12 سلول در شبکه روافتاده بوده و شبکه های ریز تر با دوبرابر شدن تعداد سلول های بدست آمده اند. در شکل ۷، پروفیل سرعت v در طول خط تقارن افقی

این ضرایب به منظور بررسی مرتبه دقت گسسته سازی محاسبه شده و در مقایسه با نتایج موجود [۱۹]، در جدول ۳ ارائه شده اند. همانگونه که مشاهده می شود، اختلاف میان نتایج با ضریب تقریبی یک چهارم کاهش می یابد و این مسأله، با گسسته سازی مکانی مرتبه دوم مورد استفاده در تطابق بوده و کارایی میانبایی بین شبکه ای را نیز به خوبی نشان می دهد. به بیان دیگر، میانبایی بین شبکه ای هیچگونه اثر منفی بر روی دقت گسسته سازی مکانی معادلات نداشته است.

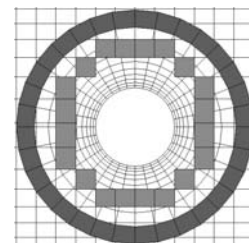
جدول ۳- ضرایب برا و پسا استوانه در جریان نامتقارن

خطا (مقایسه با شبکه ۴)	نتایج موجود [۱۹]		مدلسازی	
	C_D	C_L	C_D	C_L
			سلول	شبکه
			۱۲۴۰	۱
			۴۹۶۰	۲
			۱۹۸۴۰	۳
			۷۹۳۶۰	۴

۳-۶- سقوط آزاد استوانه به درون آب

به منظور ارزیابی نحوه ارائه سطح آزاد با تغییرات بزرگ و پیچیده و همچنین، بررسی سازه متحرک و آزاد در دامنه محاسباتی، سقوط آزاد استوانه ای به درون آب مطابق شکل ۹ مدلسازی شده است. جرم حجمی استوانه برابر آب است. پس از رهایی از یک ارتفاع مشخص در بالای سطح آزاد آب و با سرعت اولیه صفر، سرعت استوانه در لحظه برخورد به $4 \frac{m}{s}$ رسیده و سپس - با توجه به نیروی ضربه ای وارده - این مقدار به شدت کاهش می یابد. عدم لغزش در دیوار استوانه، مقدار صفر در مرز پایین و گرادین قائم صفر در سایر مرزها، بر روی سرعت اعمال گردیده و در رابطه با فشار و نسبت حجمی نیز، از گرادین قائم صفر در تمامی مرزهای استفاده گردیده است. ضخامت لایه انتقال اطلاعات $0.02m$ بوده و گام زمانی $0.0001s$ می باشد. ماهیت سلول ها - که در گام های زمانی مختلف به دلیل حرکت سازه تغییر می نمایند - در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می شود، اندازه سلول در شبکه رواقتهاده یک چهارم اندازه سلول در شبکه زمينه در این ناحیه است. این مسأله نشان دهنده قابلیت میانبایی معرفی شده در تحقیق حاضر است، زیرا تحقیقات مشابه بر یکسان

بین شبکه ای بر روی دقت حل، از چهار سطح ریزنمایی شبکه های روی هم استفاده گردیده که درشت ترین آنها، در حوالی استوانه و به همراه ماهیت سلول ها، در شکل ۸ ارائه شده است. مرز شبکه رواقتهاده حول استوانه، به اندازه D از دیواره استوانه فاصله داشته و سلول ها در مجاورت آن ریز شده اند. اولین سطح شبکه رواقتهاده، شامل ۳۲ سلول یکنواخت در حول استوانه و ۱۰ سلول غیریکنواخت در جهت شعاعی بوده و به منظور دستیابی به سطوح بعدی ریزنمایی، این تعداد سلول ها دو برابر شده اند. سلول مجاور دیوار استوانه در راستای شعاعی و در چهار سطح ریزنمایی شبکه رواقتهاده، به ترتیب 0.00142 ، 0.00069 و $0.000335m$ است. اولین سطح شبکه زمينه نیز، شامل ۲۰ سلول در راستای Z و ۴۶ سلول در راستای X است. این شبکه به سمت دیوارهای کانال ریز شده و در $4D$ اول کانال در راستای X یکنواخت است. ضخامت لایه انتقال اطلاعات برای چهار سطح شبکه یاد شده نیز به ترتیب 0.062 ، 0.034 ، 0.018 و $0.01m$ است.



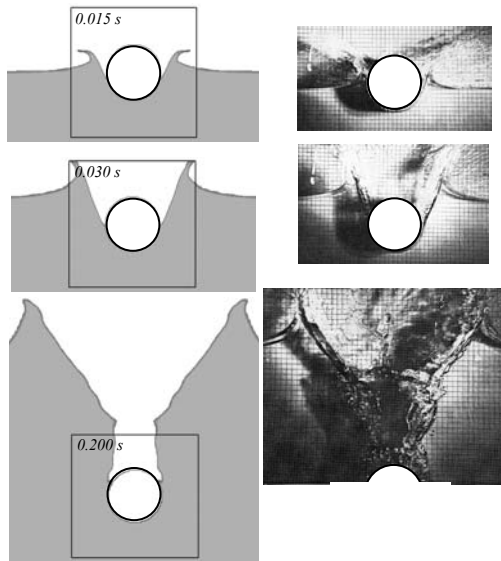
شکل ۸- شبکه های رواقتهاده در مدلسازی جریان نامتقارن حول استوانه، (لایه رنگی خارجی): سلول میانبایی شبکه رواقتهاده، (لایه رنگی داخلی): سلول میانبایی شبکه زمينه، سفید: سلول گسسته سازی

ضرایب برا و پسا، به صورت زیر تعریف و محاسبه شده است:

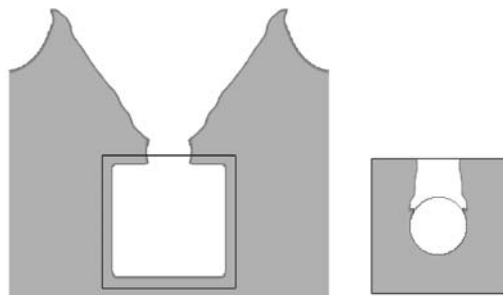
$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 D}; C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (17)$$

که در این روابط، F_x و F_z به ترتیب کل نیروی وارد بر سازه در جهت X و Z می باشند.

ارتباط می باشند، انجام می شود. این مسأله در شکل ۱۲ و با نمایش سطح آزاد در دو شبکه زمينه و روفتاده به خوبی نمایان است. همانگونه که مشاهده می شود، اگرچه بر خلاف تحقیقات پیشین مرز شبکه روفتاده در مجاورت تغییرات شدید در میدان جریان دوفازی قرار دارد، اما انتقال اطلاعات به گونه مناسبی انجام شده است.



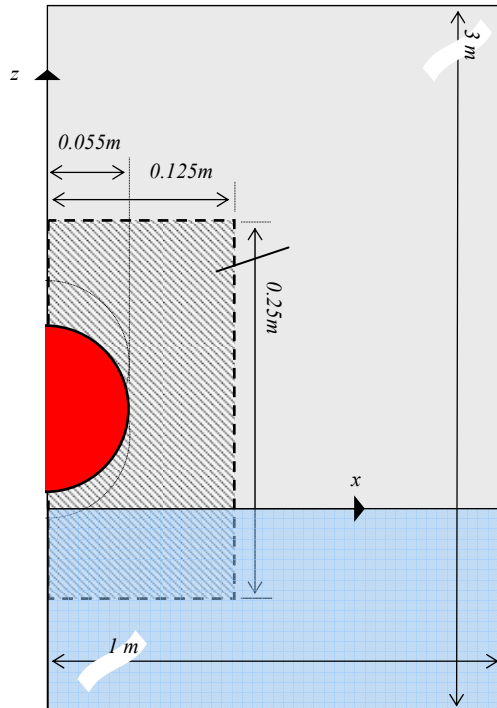
شکل ۱۱- برخورد استوانه با سطح آزاد آب در چند گام زمانی، مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی [۲۰]



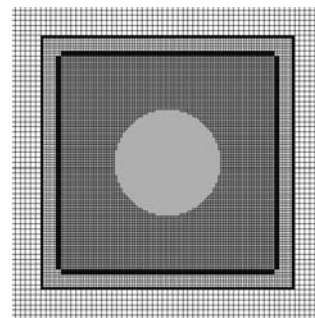
شکل ۱۲- شبکه های مورد استفاده در مدل سازی سقوط آزاد استوانه به درون آب

تاریخچه زمانی جابجایی قائم استوانه پس از برخورد با سطح آزاد نیز در شکل ۱۳ مشاهده می شود که با نتایج تجربی [۲۰] و عددی [۳، ۲۱] موجود مقایسه گردیده است. تطابق مناسب تر نتایج اخیر با نتایج

بودن کیفیت شبکه ها در این ناحیه تأکید دارند [۷]. با توجه به این قابلیت، از تعداد سلول های شبکه زمينه نیز کاسته شده است.

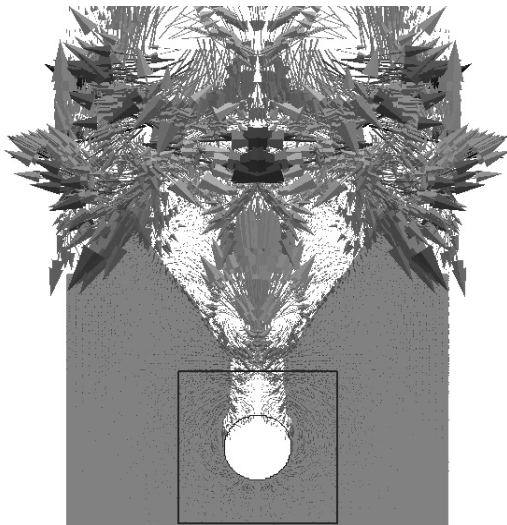


شکل ۹- دامنه محاسباتی در مسأله سقوط آزاد استوانه به درون آب شامل ۲۰۰۰۰ سلول در شبکه زمينه و ۶۰۰۰ سلول در شبکه روفتاده



شکل ۱۰- شبکه محاسباتی در مجاورت استوانه در مسأله سقوط آزاد استوانه به درون آب، قرمز: سلول های میانجی

پس از برخورد استوانه با سطح آرام آب، سطح آزاد تغییر شکل داده و این مسأله در سه گام زمانی در شکل ۱۱ نمایان بوده و با نتایج تجربی [۲۰] به صورت کیفی مقایسه گردیده است. همانگونه که پیشتر نیز بیان گردید، با استفاده از شبکه های روی هم، حل مسأله بر روی شبکه های مختلف که با یکدیگر در



شکل ۱۴- بردارهای سرعت حول استوانه در زمان ۰/۲ ثانیه پس از برخورد

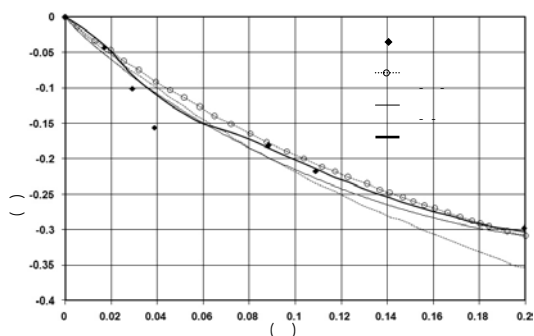
۷- نتیجه گیری

تحقیق حاضر با استفاده از دینامیک سیالات محاسباتی به ارائه یک الگوریتم حجم محدود مبتنی بر شبکه های روی هم، در حل مسائل همراه با اندرکنش سازه و جریان دوفازی پرداخته است. این الگوریتم، در عین سادگی پیاده سازی، با محدودیت در دامنه حرکات و نیز، تعداد سازه های موجود در دامنه محاسباتی همراه نمی باشد. با توسعه یک کد بر اساس آن و در فضای دوبعدی، دقت و صحت روش پیشنهادی مورد ارزیابی دقیق قرار گرفته است. با توجه به عدم وجود محدودیت در توسعه الگوریتم حاضر به فضای سه بعدی، امکان بهره مندی از یک روش عددی دقیق به منظور مطالعه انواع سازه های ساحلی و فراساحلی ثابت و متحرک وجود خواهد داشت.

کلید واژگان

- 1-Colocated Arrangement
- 2-Fractional Step Method
- 3-Volume Method
- 4-Overlapping Mesh
- 5-Background Mesh
- 6-Overset Mesh
- 7-Predictor-Corrector
- 8-Artificial Compressibility
- 9-Surface Tracking or Surface Method
- 10-Surface Capturing or Volume Method
- 11-Volume Fraction

تجربی به خوبی نمایان بوده و این مسأله، با توجه به بالاتر بودن کیفیت شبکه و نیز خطای کمتر ناشی از حرکت شبکه قابل توجه است. روش های عددی مورد اشاره در این نمودار، از روش شبکه متحرک متصل به جسم در مدلسازی حرکت استفاده نموده اند. این روش نیازمند حرکت تمامی شبکه محاسباتی و در نتیجه وارد شدن خطای بیشتر از این ناحیه است، در شرایطی که با استفاده از شبکه های روی هم، تنها بخشی از شبکه محاسباتی حرکت نموده و مابقی آن ثابت می ماند.



شکل ۱۳- تاریخچه زمانی فرو رفتن استوانه به درون آب

به منظور ارزیابی کیفی این نتایج، نرم اول خطای آنها محاسبه شده و در جدول ۴ ارائه گردیده است. همانگونه که مشاهده می شود، نرم اول خطا با استفاده از روش حاضر به شکل معناداری کمتر از بقیه موارد می باشد و این را می توان به واسطه حرکت تعداد محدودی از سلول ها علاوه بر کیفیت بالاتر شبکه بندی توجیه نمود.

جدول ۴- نرم اول خطا در مسأله سقوط آزاد استوانه به درون آب در مقایسه با نتایج تجربی موجود [۲۰]

نرم اول خطا	تحقیق
۰/۰۱۹۵۵۷	تحقیق [Xing-Kaeding, 2004]
۰/۰۱۹۰۱۳	تحقیق [Panahi et al., 2006]
۰/۰۱۳۸۷۴	تحقیق حاضر

/

- 7-Hadzic, H., (2005), Development and application of a finite volume method for the computation of flows around moving bodies on unstructured, overlapping grids, PhD Thesis, Teschnichen Universitat Hamburg-Harburg.
- 8-Mittal, M. and Iaccarino, G., (2005), Immersed boundary methods, Annual Review of Fluid Mechanics, 37:239-261.
- 9-Panahi, R. and Shafieefar, M., (2008), Technical Comparison of motion simulation strategies in finite volume simulation of marine structures hydrodynamics, International Conference on Coasts, Ports and Marine Structures (ICOPMAS), Terhan, Iran.
- 10-Jahanbakhsh, E., Panahi, R. and Seif, M.S., (2007), Numerical simulation of three-dimensional interfacial flows, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 17(4):384-404.
- 11-Jasak, H., (1996), Error analysis and estimation for finite volume method with application to fluid flows, PhD Thesis, University of London.
- 12-Gaskell, H. and Lau, A.K.C., (1988), Curvature-compensated convective transport: ART, a new boundedness-preserving transport algorithm, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 8:617-641.
- 13-Leonard, B.P., (1991), The ULTIMATE conservation difference scheme applied to unsteady one dimensional direction, Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering, 88:17-74.
- 14-Atta, E.H., (1981), Component adaptive grid interfacing, AIAA Paper, 81-0382.
- 15-Buning, P.G., Wong, T.C., Dilley, A.D. and Pao, J.L., (2000), Prediction of hyper-x stage separation aerodynamics using CFD, AIAA Paper, 2000-4009.
- 16-Chen, H.C., Lin, W.M. and Hwang, W.Y., (2002), Validation and application of chimera RANS method for ship-ship interactions in shallow water and restricted waterway, 24th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, Fukuoka, Japan.
- 17-Carrica, P.M., Wilson, R.V., Noack, R.W. and Stern, F., (2007), Ship motions using single-phase level set with dynamic overset grids, Computers & Fluids, 36(9):1415-1433.
- 18-Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., (1982), High-Re solutions for
- 12-Body-Attached or Moving Mesh
- 13-Deformable Mesh
- 14-Sliding Mesh
- 15-Re-mesh
- 16-Cartesian Mesh
- 17-Free Motions
- 18-Forced Motions
- 19-Gauss Theorem
- 20-Kim and Choi
- 21-Adams-Bashforth Scheme
- 22-Crank-Nicholson Scheme
- 23-Picard Iteration
- 24-Gama Interpolation
- 25-Over-Relaxed Interpolation
- 26-Euler Implicit
- 27-Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes (CICAM)
- 28-Convection Boundedness Criteria (CBC)
- 29-ULTIMATE QUICKEST (UQ)
- 30-Paraview

۸- مراجع

- 1-Ferziger, J., Peric, M., (2002), Computational methods for fluid dynamics, 3rd Rev. Ed., Springer Verlag.
- 2-Panahi, R., Jahanbakhsh, E. and Seif, M.S., (2005), Comparison of interface capturing methods in two phase flow, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B: Technology, Vol.29, No.B6, 539-548.
- 3-Panahi, R., Jahanbakhsh, E. and Seif, M.S., (2006), Development of a VoF fractional step solver for floating body motion simulation, Applied Ocean Research, 28(3):171-181.
- 4-Chentanez, N., Goktekin, T.G., Feldman, B.E. and O'Brien, J.F., (2006), Simultaneous coupling of fluids and deformable bodies, Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation.
- 5-Blades, E. and Marcum, D.L., (2007), A sliding interface method for unsteady unstructured flow simulations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 53:507-529.
- 6-Tremel, U., Sorensen, K.A., Hitzel, S., Rieger, H., Hassan, O. and Weatherill, N.P., (2007), Parallel remeshing of unstructured volume grids for CFD applications, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 53(8):1361-1379.

20-Greenhow, M. and Lin, W., (1983), Nonlinear free surface effects: experiments and theory, Report No. 83-19, Massachusetts Institute of Technology.

21-Xing-Kaeding, Y., (2004), Unified approach to ship seakeeping and maneuvering by a RANSE method, PhD Thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg.

incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, Journal of Computational Physics, 48:387-411.

19-Schäfer, M. and Turek, S., (1996), Benchmark computations of laminar flow around cylinder, In Flow simulation with high-performance computers: DFG priority research program results 1993-1995, E.H. Hirschel, Ed., Vol.52, Vieweg, Braunschweig, pp. 547-566.