# تحلیل تنش دیسک توربین موتور توربین گاز دریایی تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از روش هموتوپی

بهروز شهریاری<sup>(\*</sup>، حسین مروج برزانی<sup>۲</sup>، شهرام یوسفی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دکتری ، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر؛ shahriari@mut-es.ac.ir ۲ کارشناس ارشد، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی امیر کبیر؛ moravejhossein@aut.ac.ir ۳ دانشیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر؛ Yousefi100@mut-es.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
دیسک دوار در موتور توربین گاز دریایی یکی از اجزای بحرانی است که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی مختلف قرار دارد. در این تحقیق روش هموتوپی <sup>۱</sup> جهت تحلیل تنش این دیسک دوار ارایه میشود. اعمال بارگذاری حرارتی در دیسکی با توزیع ضخامت نمایی با استفاده از روش هموتوپی و لحاظ نمودن تغییرات خواص فیزیکی و مکانیکی با دما، مهمترین جنبههای نوآوری تحقیق را تشکیل می دهند. تغییرات ضخامت	ت <i>اریخچه مقاله:</i> تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۷/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۲۳
دیسک به صورت نمایی و دو ریم داخلی و خارجی دیسک به صورت ضخامت ثابت در نظر گرفته می شوند. پارامترهای مهم و تاثیر گذار در روش هموتوپی انتخاب و به کار گرفته شدهاند. سپس به مقایسه نتایج و اعتبارسنجی با روش کد المان محدود پرداخته شده است. در نهایت توزیع تنش در دیسکهایی با توزیع ضخامت ثابت، نمایی و هایپربولیک در نظر گرفته شده و به مقایسه، بحث و نتیجه گیری پرداخته شده است. نتایج حاکی از کارایی روش با دقت قابل قبول جهت تحلیل دیسکهای دوار تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی در موتور توربین گاز است.	<i>کلمات کلیدی:</i> <i>توربین گاز دریایی</i> دیسک دوار توربین بارگذاری حرارتی و مکانیکی تحلیل تنش روش هموتوپی

## **Stress Analysis of Marine Gas Turbine Engine Turbine Disk Subjected to Thermal Load Using Homotopy Method**

Behrooz Shahriari<sup>1\*</sup>, Hosssein Moravej Barzani<sup>2</sup>, Shahram yousefi<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Phd., Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, shahriari@mut-es.ac.ir <sup>2</sup>Msc, Department of Aerospace Engineering, Amir Kabir University of Technology, moravejhossein@aut.ac.ir <sup>3</sup>Associate professor, Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Yousefi100@mutes.ac.ir

## **ARTICLE INFO**

Article History: Received: 1 Oct. 2016 Accepted: 15 Oct. 2017

*Keywords:* Marine gas turbine Turbine rotating disk Thermal and mechanical loading Stress analysis Homotopy method

## ABSTRACT

A marine gas turbine rotating disk is one of the most critical components which operates under nonstationary varying mechanical and thermal loads. In this research, the homotopy method is used for stress analysis of rotating disk subjected to thermal load. Apply the thermal loading on the disk with exponential thickness distribution by using the homotopy method and Considering the physical and mechanical properties variations with temperature, are the most important aspects of innovation in this paper. Disc thickness variations are considered exponential and the inner and outer rims of disk are considered constant thickness. Due to the use of homotopy analysis method, important and effective parameters in this method are selected and presented. Furthermore, results are compared and validated with finite element code and good agreement of results with this method is showed. Finally, stress distribution in disks with constant, exponential and hyperbolic thickness distribution are considered and compared. The results showed the efficiency and acceptable accuracy of the method for analysis of rotating disk subjected to thermal and mechanical loading.

#### ۱– مقدمه

توربینهای گازی مولدهای پر قدرتی هستند که مقدار زیادی انرژی را به نسبت وزن و ابعادشان تولید می کنند. این توربینها از گذشته تا کنون کاربردهای زیادی در صنایع زمینی، هوایی و دریایی داشتهاند. وزن کم و امکان استفاده از چندین نوع سوخت نظیر گاز طبیعی، سوخت دیزل و متان این مولدها را برای کاربرد در سکوهای نفتی و ساحلی و کشتیها مناسب می سازد. هر چند این موتورها بیشتر به علت استفاده در هواپیما معروف شدهاند، اما در حمل و نقل زمینی، دریایی و کاربردهای ثابت مثل نیرو گاهها بیشترین تنوع در ترکیب را دارا بوده و در حال توسعه هستند.

کاربرد توربینهای گازی به عنوان نیروی پیشران کشتی در کشورهای صنعتی همواره در حال توسعه بوده و پیشرفت آن در سالهای اخیر شدت بیشتری به خود گرفته است. از زمان تعریف توربین گاز به عنوان یک واحد پیشران دریایی در سال ۱۹۴۷ وقتی که نیروی دریایی سلطنتی بریتانیا یک توربین گاز با توان ۲۵۰۰ اسب بخار را در یک ناو کوچک توپدار به کار برد، گسترش در این زمینه وجود داشته است. این موتورها در ابتدا در شناورهای کوچک و قایق های تندرو مورد استفاده قرار گرفتند و پس از آن در سیستمهای تولید برق کمکی در کشتی است. سال ۱۹۶۶ سرآغاز یک عصر جدید در مهندسی کشتیهای جنگی بود. زمانی که هیات مدیره اداره نیروی دریایی بریتانیا تبدیل ناوچه کلاس بلک وود، اچ.ام. اس را به کشتی جهت تجهیز نیروی دریایی سلطنتی به توربینهای گازی سبک جهت تجهیز نیروی دریایی سلطنتی به

به طور کلی مزایای استفاده از توربین گازی دریایی به جای سایر موتورها دریایی را به صورت ذیل میتوان بیان نمود [۱، ۲، ۳]:

- نسبتهای توان به وزن و توان به حجم بالا: این موتورها نسبت توان به وزنشان حداقل ۴ برابر موتورهای دیزل سرعت متوسط است. اشغال فضای کم و کم بودن وزن، فضای کاری را برای فعالیتهای دیگر آزاد میسازد. به طور مثال موتور توربین گازی LM2500 جنرال الکتریک با توان متوسط حدود ۳/۵ تن میباشد. دارای ۲۵/۴ متر طول و ۲/۶ متر قطر و وزنی برابر ۳/۵ تن میباشد.

- آسانی نصب و سرویس که با طراحی مدولار و تجمیع سیستمهای پشتیبان و کنترل موتور حاصل میشود.

- هزینههای نگهداری نسبتا کم، نیازمندی کم به قطعات یدکی و آسانی تعویض قطعات

- سازگاری با محیط زیست (انتشار NO<sub>x</sub> و SO<sub>x</sub> کمتر نسبت به موتورهای دیزل)

- کاهش نیاز به نیروی انسانی و اپراتوری با کاملا خودکار کردن موتور

-انعطاف عملکردی و کاربری آسان: استارت سریع؛ عدم نیاز به گرم شدن و کارکردن بدون بار اولیه موتور با شتاب گیری سریع موتور (موتور در ۳۰ ثانیه به دور کاری خود میرسد)؛ پس از خاموش شدن موتور کاهش شتاب به سرعت انجام می پذیرد؛ قابلیت استارت ثانویه حتی بعد از خاموش شدن موتور پس از کار زیاد ( بدون محدودیت نیاز به خنک شدن موتور).

یک توربین گاز دریایی با سیکل پیشرفته عرضه شده در بازار، -WR 21 است که توسط شرکت نورث روپ گرومن در آمریکا و شرکت رولزرویس با پشتیبانی نیرویهای دریای آمریکا، انگلیس و فرانسه در دهه۹۰ توسعه پیدا کرد. این موتور نخستین موتور توربین مشتق شده از موتورهای هوایی RB211 و ترنت است که مجهز به سیکل ICR، یعنی خنککننده داخلی کمپرسور و بازیاب گرما جهت کاهش مصرف سوخت ویژه (SFC) به بیش از ۳۰ درصد نسبت به سیکلهای ساده توربین گاز است (شکلهای ۱ و ۲). همان طور که در شکل ۱ مشاهده می شود این موتور دارای یک کمپرسور فشار پایین (LP) و یک کمپرسور فشار بالا (HP) است که گرداننده هر کدام از این کمپرسورها به ترتیب توربین فشار پایین (LP) و توربین فشار بالا (HP) هستند. هوا ورودی موتور پس از عبور از کمپرسور فشار پایین به جای ورود مستقیم به کمپرسور فشار بالا، وارد یک سیستم خنکساز میانی می شود. خنکسازی در این سیستم توسط آب انجام می شود. این عملیات سبب افزایش توان به میزان ۲۵ درصد می گردد. هوای خروجی از کمپرسور فشار بالا نیز قبل از ورود به محفظه احتراق، با ورود به رکوپراتور که یک مبدل حرارتی با جریان متقابل است، پیشگرم میشود. گرمای مورد نیاز این مبدل حرارتی از خروجی توربین فشار پایین تامین می شود.



شکل ۱: توربین گاز دریایی WR-21 با سیکل پیشرفته ICR [۲]

در شکل۲ کاهش مصرف سوخت در موتور توربین گاز دریایی -WR در شکل۲ کام کاز با سیکل ساده 21 مجهز به سیکل باده



شکل ۳: بخشهای اصلی یک موتور توربین گاز دریایی مشتق شده از موتورهای هوایی [۲]

روشهای حل نیمه تحلیلی و عددی تنها راههای مورد استفاده جهت تعریف دقیق کمیتهای اصلی و تعیین کننده برای طراحان هستند. تعداد کمی از مسایل مهندسی جهت تحلیل تنش و کرنش در حوزه الاستیک یا حتی فراتر از آن معادلاتی را ایجاد می کنند که جهت پیاده سازی پارامترها در قالب فرمولهای جبری، به فرم بسته قابل حل هستند. صرفنظر از حالاتی که معادلات حاکم بر دیسک می توانند حل دقیق داشته باشند (دیسک ضخامت ثابت، دیسک هایپربولیک و دیسک استحکام ثابت)، در سایر موارد استفاده از روشهای نیمه تحلیلی و عددی ضروری است و نتایج آنها به خصوص برای مرحله طراحی مفهومی قابل قبول هستند.

تیموشنکو [۵] حلهایی تحلیلی از تنش و کرنش دیسکهای خاص ارایه کرد. در زمینه روشهای عددی، تحقیقات انجام شده توسط مانسون مورد توجه قرار گرفته و در این مورد میتوان از کار او [۶] در رابطه با حل تفاضل محدود و با استفاده از معادلات تعادل و سازگاری در محدوده الاستیک نام برد. همچنین در زمینه اجزا محدود، میتوان به کار انجام شده توسط فنر [۷] اشاره کرد.

در زمینه حل تحلیلی از دیسکی با توزیع ضخامت سهموی و بیضوی میتوان به ترتیب به کار مشترک اپاتی و ارسلن [۸] و کار ارسلن [۹] اشاره کرد. در زمینه تغییرشکل الاستیک و پلاستیک، به کار ارسلن و ارکن [۱۰] که به بررسی تغییرشکل دیسکهای توپر ضخامت متغیر با پروفیل همگرا و ارایه حل تحلیلی برای تغییرشکل الاستیک و پلاستیک دیسک توپر با توزیع نمایی پرداختند، میتوان اشاره کرد. نشان داده شده است. در واقع عملیات پیش گرم در رکوپراتور باعث کاهش ۳۰ تا ۴۰ درصدی مصرف سوخت می شود.



شکل ۲: کاهش مصرف سوخت در موتور توربین گاز دریایی WR-21 شکل ۲: مجهز به سیکل ICR نسبت به موتور توربین گاز با سیکل ساده[۲]

در یک نوع ناوچه متعلق به نیروی دریایی هلند از ترکیب موتور دیزل و توربین گاز استفاده شده است. این ناوچه برای پدافند هوایی در پلت فرم عادی طراحی شده و قادر به انجام عملیات طولانی مدت در دریا است. هر یک از این ناوچهها دارای دو توربین گاز رولزرویس و دو موتور دیزل است. توربینهای گاز در قسمت جلوی اتاق موتور قرار گرفتهاند و موتورهای دیزل در عقب اتاق هستند. موتور از طریق کنترل گام پروانه کشتی به وسیله یک گیربکس معمولی توان لازم برای حرکت کشتی را فراهم میکند. نیروی الکتریکی مورد نیاز کشتی هم از یک ژنراتور دیزلی جداگانه تامین میشود.

بخشهای اصلی یک موتور توربین گاز دریایی مشتق شده از موتورهای هوایی در شکل ۳ نشان داده شده است. این بخشها شامل ورودی کمپرسور، کمپرسور جلو، کمپرسور میانی، گیربکس، کمپرسور عقب، دیفیوزر، محفظه احتراق، نازل توربین، توربین راننده کمپرسور عقب، توربین راننده کمپرسور جلو و خروجی گاز میباشند. دیسکها بخش مهمی از روتور توربین و کمپرسور هستند.

دیسکهای دوار که تحت بارهای سطحی، حجمی و حرارتی قرار دارند در موتورهای توربین گاز کاربرد گستردهای دارند. تحلیل تنش و کرنش این دیسکها از اهمیت خاصی برخوردار است. از طرفی تعداد کمی از دیسکها دارای هندسهای ساده جهت مدل سازی هستند و معمولاً هندسه روتورها، پیچیده است [۴].

زنکور [۱۱] حل ترموالاستیکی برای دیسکهای حلقوی ضخامت متغیر در نظر گرفت. همچنین زنکور و همکارانش [۱۲] به توسعه حل تحلیلی جهت بررسی تنشها و تغییر شکل دیسکهای توپر و حلقوی در شرایط ویسکوالاستیک و با مقاطع دلخواه ضخامت متغیر پرداختند.

ولو و ویوو [۱۳] به تحلیل دیسکهای دوار ضخامت متغیر تحت بارهای حرارتی، با تغییر چگالی در راستای شعاع پرداختند. در این تحقیق با توجه به انتخاب شکل توانی معادله تغییر ضخامت، فرایند حل معادلات با استفاده از سریهای دارای مرتبه هندسی بالا<sup>۲</sup> دنبال شد. اگر نسبت عبارات پی در پی از یک سری به صورت یک تابع گویا باشد، این سری از سریهای دارای مرتبه هندسی بالا است و جهت حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار می گیرد. ثابت، استحکام ثابت و هذلولوی) نباشد، سریهای مرتبه هندسی بالا جهت حل معادلات به کار برده میشوند. البته در مورد دیسک تعریف شده با توزیع نمایی، دارای محدودیتهایی است و بسته به شکل نمایی انتخاب شده، متفاوت و یا اصلاً غیر قابل استفاده هستند[۱۴].

حجتی و جعفری [۱۵] دو روش اختلالات هموتوپی و آدومین را جهت تحلیل تنش و کرنش در دیسک دوار ضخامت و چگالی متغیر به کار بردند. در این کار تغییرات ضخامت به صورت توانی بوده و بدون در نظر گرفتن تغییرات دما و لبههای ابتدایی و انتهایی انجام شده است.

در زمینه مواد مدرج تابعی<sup>۳</sup>، میتوان به کار نی و بترا [۱۶] اشاره کرد. در این تحقیق کلیه پارامترهای وابسته به دما به صورت تابعی از دما تعریف میشوند. حل مساله با تعریف تابع تنش و حلهای تحلیلی و عددی انجام میشود. در رابطه با مواد مدرج میتوان به کار بیات و همکارانش [۱۷] نیز اشاره کرد. در این تحقیق به منظور کاهش وزن سازه دیسک از مواد مدرج استفاده شده و پس از محاسبه تنشها، نتایج حاصل با سایر دیسکها (از لحاظ توزیع تنش و وزن) مقایسه و معایب دیسکهای ضخامت ثابت بیان شده است.

زنکور و مشت [۱۸] دیسکهای ضخامت متغیر را همراه با لبههای انتهایی و ابتدایی، با در نظر گرفتن تابع نمایی، با روش تفاضل محدود و بدون اثرات حرارتی مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق دیسکهای توپر و حلقوی به طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفتند. تابع نمایی مورد استفاده جهت مدلسازی لبهها و ضخامت دیسک به طور پیوسته و همزمان به کار رفت و لبههای دیسک به صورت ضخامت ثابت مدل نشدند. در نظر گرفتن یک تابع جهت تحلیل لبهها و ضخامت اصلی دیسک، باعث افزودن یا کاستن و به طور کلی تغییر هندسه دیسک میشود. از طرفی مشکل پرش تنش

که در مسایلی با چند تابع مختلف و به خصوص در لبههای ابتدایی و انتهایی رخ میدهد، در این مورد وجود ندارد.

حسنی و همکارانش [۱۹] با استفاده از توابع توانی به تحلیل عددی و ترموالاستیک از دیسکهای ضخامت، چگالی و دما متغیر پرداختند. روشهای اجزا محدود و رانگ-کوتا<sup>۴</sup> جهت حل معادلات مورد استفاده قرار گرفتند. این تحقیق با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف و بدون لبههای انتهایی و ابتدایی انجام شد. با توجه به اینکه دیسک روتور دارای لبههای انتهایی و ابتدایی است، مدلسازی این لبهها ضروری بوده و عدم بررسی آنها دقت مساله را تحت تاثیر قرار میدهد.

مروری بر تحقیقات انجام شده نشان میدهد که تا امروز، تحلیلهای بسیاری بر دیسکهای ضخامت متغیر انجام شده و پیشرفتهای چشم گیری صورت گرفته است. اما تعریف کامل هندسه برخی دیسکها مستلزم استفاده از چند تابع مختلف است و در صورتی که این توابع به درستی و همراه با هم تعریف نشوند، دقت حل تحت تاثیر قرار می گیرد. لذا تعریف و استفاده از این توابع برای برخی از دیسکها، امری مهم و ضروری است.

در تحقیق حاضر به منظور تحلیل سازه دیسک و جهت تعریف کاملی از هندسه، ناچار به تعریف چند تابع مختلف است که هر کدام بخشی از هندسه را مدل میکنند. پارامترهایی همچون مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و غیره که تابعیت از دما دارند، با این توابع مختلف از تعریف هندسه همراه میشوند و مساله مورد حل را تشکیل میدهند. در ادامه جهت حل معادلات و در مرحله طراحی مفهومی از روش تحلیل هموتوپی<sup>†</sup> که فرمول بندی و دقت مناسبی از مساله را نسبت به روش اختلالات هموتوپی فراهم می سازد، استفاده می شود.

## ۲- معادلات ترموالاستیسیته حاکم بر دیسک دوار

دیسک دواری با سرعت زاویهای  $\omega$  و تحت بارگذاری حرارتی در راستای شعاع در نظر گرفته میشود. چون که نیروها توابعی از شعاع و متقارن فرض میشوند، تنش برشی برابر صفر بوده و تنشهای شعاعی و مماسی توابعی از شعاع هستند. از طرفی به دلیل نازک بودن دیسک، فرض تنش صفحهای برای مساله مورد بررسی در نظر گرفته شده است. معادله تعادل دیسکی دوار به صورت (۱) نوشته میشود.

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r.h.r) - \sigma_r.h + \gamma.\omega^2.r^2.h = 0 \tag{1}$$

h به ترتیب تنشهای شعاعی و مماسی، h به ترتیب تنشهای شعاعی و مماسی،  $\sigma_r$  تغییرات ضخامت (تابعی از شعاع)، r شعاع و  $\gamma$  جرم بر واحد حجم یا همان چگالی است.

روابط کرنش – جابجایی در دیسک دوار و برای حالت تنش صفحهای به صورت (۲) هستند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{dU}{dr} \\ \varepsilon_t = \frac{U}{r} \end{cases}$$
(Y)

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - v \sigma_r) + \alpha T \\ \varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - v \sigma_r) + \alpha T \end{cases}$$
(٣)

می توان به رابطه (۴)دست یافت.

$$\begin{cases} \sigma_{r} = \frac{E}{1 - v^{2}} [(\varepsilon_{r} - \alpha T) + v(\varepsilon_{t} - \alpha T)] \\ \sigma_{t} = \frac{E}{1 - v^{2}} [(\varepsilon_{t} - \alpha T) + v(\varepsilon_{r} - \alpha T)] \end{cases}$$
(\*)

با ترکیب روابط (۴) و (۲):

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1 - v^2} \left[ \left( \frac{dU}{dr} - \alpha T \right) + v \cdot \left( \frac{U}{r} - \alpha T \right) \right] \\ \sigma_r = \frac{E}{1 - v^2} \left[ \left( \frac{U}{r} - \alpha T \right) + v \cdot \left( \frac{dU}{dr} - \alpha T \right) \right] \end{cases}$$
( $\delta$ )

و جای گذاری روابط (۵) در رابطه تعادل (۱)، رابطه کلی (۶) برای دیسکی دوار، با پروفیل دلخواه و گرادیان دمایی غیر صفر در طول شعاع به دست مي آيد.

$$\frac{d^{2}U}{dr^{2}} + \left(\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{dU}{dr} + \left(\frac{v}{h.r}\cdot\frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^{2}}\right)U$$
$$-(1+v)\cdot\alpha\cdot\left(\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h}\cdot\frac{dh}{dr}\right) + (1-v^{2})\cdot\frac{\gamma\cdot\omega^{2}\cdot r}{E} = 0$$
(9)

از E ، V ، h و T با توجه به مساله می توانند به صورت توابعی از E ، V ، hشعاع بیان شوند. در صورتی که هر یک از پارامترها به صورت توابعی ثابت، سهموی، بیضوی، هذلولوی، نمایی و یا ترکیبی از آنها تعريف شوند، فرايند و روش حل مساله متفاوت خواهد شد و مساله می تواند دارای حل تحلیلی یا تقریبی باشد.

## ۳- روش تحلیل هموتوپی

طی دهههای اخیر، لیائو [۲۰] به ارایه روش تحلیل غیرخطی با نام هموتوپی پرداخته است. این روش از جایگاه ویژهای برخوردار است؛ چرا که همواره مجموعهای از پاسخها را در قالب یک پارامتر کمکی ارایه میدهد. روش تحلیل هموتوپی در زمینههای مختلف و گستردهای همچون الکترواستاتیک، تیرها، انتقال حرارت پرهها و

غیره جهت تحلیل غیرخطی به کار گرفته شدهاند. در ادامه به ارایه تئوری حاکم بر این روش پرداخته میشود.

$$N[u(r,t)] = 0 \tag{Y}$$

جایی که N عمل گری غیر خطی، u(r,t) تابعی مجهول و r و t به ترتیب متغیرهای مستقل فاصلهای و زمانی هستند. پارامتری  $h \neq 0$  ،u(r,t) وليه از حل دقيق  $u_0(r,t)$ کمکی،  $0 \neq H(r,t) \neq 0$  تابعی کمکی و L عمل گری خطی است که اگر f(r,t)=0 باشد:

$$L[f(r,t)] = 0 \tag{(A)}$$

با به کار بردن  $q \in [0,1]$  به عنوان پارامتر تعبیهای، هموتوپی به شکل رابطه (۹) تشکیل داده میشود:

$$H = (1 - q) \{ L[\varphi - u_0] \} - q h H N[\varphi]$$
(9)

جایی که:

L

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi(r, t, q) \\
u_0 &= u_0(r, t) \\
H &= H(r, t)
\end{aligned}$$
(1.)

 $\omega = \omega(r, t \cdot a)$ 

پارامتر کمکی و غیر صفر 
$$h$$
 و تابع کمکی  $H(r,t)$  در مرحله اول  
این روش، هموتوپی را تشکیل میدهند. بنابراین پارامتر  $h$  و تابع  
 $H(r,t)$  نقش مهمی را در روش تحلیلی هموتوپی ایفا میکنند.  
با صفر قراردادن رابطه هموتوپی (۹)، معادله تغییر شکل مرتبه صفر  
(۱۱) بهدست می آید:

$$(1-q)\{L[\varphi - u_0]\} = q h H N[\varphi]$$

$$(11)$$

جایی که  $\varphi(r,t;q)$  فقط به حدس اولیه  $u_0(r,t)$ ، عمل گر خطی کمکی h وابسته نیست و H(r,t) کمکی h وابسته نیست و Lبه  $q \in [0,1]$  نیز بستگی دارد. هنگامی که q = 0 باشد، رابطه  $q \in [0,1]$ (۱۱) به رابطه (۱۲) تبدیل می شود:

$$L[\varphi(r,t;0) - u_0(r,t)] = 0$$
(17)

که طبق رابطه (۷)، رابطه (۱۳) به دست می آید:

$$\varphi(r,t;0) = u_0(r,t) \tag{11}$$

 $H(r, t \neq 0$  هنگامی که  $h \neq 0$  و  $h \neq 1$  و  $h \neq 1$ هستند، معادله تغییر شکل مرتبه صفر (۱۱) به معادله (۱۴) تبدیل می شود:

$$N[\varphi(r,t;1)] = 0 \tag{14}$$

طبق رابطه (۷) و مانند رابطه (۱۳):

$$\varphi(r,t;1) = u(r,t) \tag{10}$$

بنابراین، بر اساس روابط (۱۳) و (۱۴)، همزمان با افزایش p از ۰ تا ۱، (p(r,t;q)) به طور پیوسته از تقریب اولیه  $(u_0(r,t))$  تا حل دقیق u(r,t) از معادله کلی (۷) تغییر میکند و به خاطر تغییرات پیوستهاش از تقریب اولیه به حل دقیق، تغییر شکل نامیده می شود. مشتقات تغییر شکل مرتبه m به صورت (۱۶) تعریف می شوند:

$$u_0^{[m]}(r,t) = \frac{\partial^m \varphi}{\partial q^m} ]_{q=0} \tag{19}$$

با استفاده از بسط تیلور،  $\varphi(r,t;q)$  میتواند در قالب سریهای توانی از q و به صورت (۱۷) بسط یابد:

$$\varphi(r,t;q) = \varphi(r,t;0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_0^{[m]}(r,t)}{m!} q^m$$
(1Y)

با نوشتن  $u_m(r,t)$  به صورت (۱۸):

$$u_m(r,t) = \frac{u_0^{[m]}(r,t)}{m!} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(r,t;q)}{\partial q^m} ]_{q=0}$$
(1A)

و با استفاده از رابطه (۱۳) و سریهای توانی (۱۷)، رابطه (۱۹) به دست میآید:

$$\varphi(r,t;q) = u_0(r,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r,t)q^m$$
(19)

انتخاب حدس اولیه  $u_0(r,t)$ ، عمل گر خطی کمکی L و تابع کمکی اختیاری است. با انتخاب q = 1:

$$u(r,t) = u_0(r,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r,t)$$
 (Y•)

 $u_0(r,t)$  رابطه (۲۰)، رابطه ای بین حل دقیق (r,t) و تقریب اولیه (۲۰)، رابطه ( $u_m(r,t)$  و عبارت  $u_m(r,t)$  است. به منظور یافتن معادلات حاکم بر  $u_m(r,t)$  ایائو رابطه (۲۰) را در (۱۱) قرار داد و سپس با استفاده از ضرایب یکسانی که از q در روابط وجود داشت، رابطه (۲۱) را تشکیل داد: [۲۰]

$$L[u_{m}(r,t) - \chi_{m}u_{m-1}(r,t)] = hH(r,t)R_{m}(u_{m-1},r,t)$$
((1))
  
جایی که:

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \le 1\\ 1 & m > 1 \end{cases}$$
(YY)

$$R_{m}(u_{m-1},r,t) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}N\left[\varphi(r,t;q)\right]}{\partial q^{m-1}}]_{q=0}$$
(YY)

توجه به این که رابطه (۲۱)، رابطهای خطی است، از اهمیت ویژهای برخوردار است. با یافتن تقریبهای مرتبه m - 1 نیز به  $u_1(r,t)$  نیز. سپس با استفاده از  $u_0(r,t)$ ، میتوان  $u_1(r,t)$ ،  $u_2(r,t)$  و ... را نیز به دست آورد. بنابراین بر اساس معادله (۲۰)،

مسالهای غیر خطی به بینهایت زیر مساله خطی که با استفاده از رابطه (۲۱) به دست میآیند، تبدیل میشود [۲۱].

اگر ترمهایی بدون  $\varphi(r,t;q)$  در معادله اصلی وجود داشته باشند، عبارت  $hH(r)(1-\chi_m)$  در این ترمها ضرب شده و با بخش غیر خطی جمع می شود.

هنگامی که تقریب اولیه (r,t)، عمل گر خطی کمکی L و تابع کمکی H(r,t) مشخص شوند، هنوز گستره انتخاب زیادی برای مقدار پارامتر کمکی h وجود دارد. بر خلاف سایر روشها، تحلیل هموتوپی همواره مجموعهای از پاسخها را در قالب پارامتر کمکی h به دست میآورد. بنابراین انتخاب h از اهمیت ویژهای برخوردار است. جهت انتخاب مقدار صحیح h، تغییرات نمودار پاسخ بر حسب h اهمیت پیدا می کند و معمولاً از محدودهای که مقدار پاسخ دارای تغییرات کمی باشد، انتخاب می شود.

در حالت کلی، مسالهای غیر خطی ممکن است توسط مجموعهای از معادلات حاکم با شرایط اولیه یا مرزی مرتبط توصیف شود. با توجه به اینکه فرم معادله (۷) نیز کلی است و معادله حاکم بر مساله را مشخص میکند، این معادله میتواند معادلهای دیفرانسیلی، معادلهای انتگرال-دیفرانسیلی، یا معادلهای جبری باشد. همه معادلات حاکم و شرایط مرزی میتوانند به روشی مشابه مورد بحث قرار گیرند. برای معادلات حاکم و شرایط مرزی متفاوت، باید تقریبهای اولیه متفاوت و عمل گرهای خطی کمکی متفاوت انتخاب شوند و بدین ترتیب مساله مورد برسی تشکیل شود. بنابراین، تقریب هموتوپی کلی و جامع است.

به منظور حل معادله (۶)، ابتدا عمل گر غیر خطی N تعریف می شود:

$$N\left[\varphi(r;q)\right] = \frac{d^2\varphi(r;q)}{dr^2} + \left(\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi(r;q)}{dr} + \left(\frac{\nu}{h.r}\cdot\frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)\cdot\varphi(r;q) - (1+\nu)\cdot\alpha\cdot\left(\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h}\cdot\frac{dh}{dr}\right) + (1-\nu^2)\cdot\frac{\gamma\cdot\omega^2\cdot r}{E} = 0$$
(Yf)

از طرفی با تعریف رابطه (۲۴) از N، رابطه (۲۱) به صورت (۲۵) نوشته می شود:

$$\begin{split} L[u_{m}(r) - \chi_{m}u_{m-1}(r)] &= \\ hH(r) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \Big[ \frac{d^{2} \varphi(r;q)}{dr^{2}} \\ &+ \Big( \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} \Big) \frac{d \varphi(r;q)}{dr} + (\frac{v}{h,r} \cdot \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^{2}}) \cdot \varphi(r;q) \Big]_{q=0} \\ &+ hH(r)(1 - \chi_{m})(-(1 + v) \cdot \alpha \cdot (\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h} \cdot \frac{dh}{dr}) \\ &+ (1 - v^{2}) \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^{2} \cdot r}{E} ) = \\ &= hH(r) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \Big[ \sum_{k=0}^{\infty} [u_{k}'' + \Big( \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} \Big) u_{k}' \Big] \\ &+ (\frac{v}{h,r} \cdot \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^{2}}) u_{k} \Big] q^{k} \Big]_{q=0} \\ &+ hH(r)(1 - \chi_{m})(-(1 + v) \cdot \alpha \cdot (\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h} \cdot \frac{dh}{dr}) \\ &+ (1 - v^{2}) \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^{2} \cdot r}{E} \Big) = \\ &= hH(r)[u_{m-1}'' + \Big( \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} \Big) u_{m-1}' + (\frac{v}{h,r} \cdot \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^{2}}) u_{m-1} \Big] + \\ &+ hH(r)(1 - \chi_{m})(-(1 + v) \cdot \alpha \cdot (\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h} \cdot \frac{dh}{dr}) \\ &+ (1 - v^{2}) \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^{2} \cdot r}{E} \Big) = \\ \end{aligned}$$

با توجه به اختیاری بودن انتخاب L و  $u_0(r)$  و با توجه به مسایل حل شده با استفاده از روش هموتوپی، این توابع به صورت رابطه (۲۶) تعریف می شوند:

$$L(\varphi(r;q)) = \frac{\partial^2 \varphi(r;q)}{\partial r^2}$$

$$u_0(r) = c_0 + c_1 r$$
(17)

جایی که با توجه به شرایط مرزی مجهول تغییر مکان در شعاع داخلی و خارجی،  $c_0$  و  $c_1$  به وسیله شرایط مرزی ارایه شده در رابطه (۲۷) مشخص می شوند:

$$u_0(r_i) = \alpha$$

$$u_0(r_o) = \beta$$
(YY)

طبق روابط قبل،  $u_m(r)$  به صورت رابطه (۲۸) تعریف می شود:

$$u_{m}(r) = c_{0_{m}} + c_{1_{m}}r + \chi_{m}u_{m-1}(r) + + h \iint H(r)([u_{m-1}'' + \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r}\right)u_{m-1}' + (\frac{v}{h.r} \cdot \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^{2}})u_{m-1}] + + (1 - \chi_{m})(-(1 + v) \cdot \alpha \cdot (\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h} \cdot \frac{dh}{dr}) + + (1 - v^{2}) \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^{2} \cdot r}{E}))dr dr$$
(7A)

از طرفی با توجه به این که شرایط مرزی منطبق بر مساله در رابطه (۲۷) ارضا شدند،  $c_{1m}$  و  $c_{0m}$  نیز با شرایط ارایه شده در رابطه (۲۹) مشخص می شوند:

$$u_m(r_i) = 0$$
  

$$u_m(r_o) = 0$$
(Y9)

از طرفی H(r)=1 در نظر گرفته می شود. توابع h، V، h از طرفی T تیز با توجه به مساله تعریف می شوند.

#### ۴- دیسک مورد تحلیل

هندسه دیسک مورد تحلیل مطابق شکل ۴ بوده که شامل یک بخش نمایی و دو بخش ضخامت ثابت می شود. این شکل پروفیل دیسک را نشان می دهد که در آن توزیع ضخامتی نمایی به صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته می شود.

$$h = h_0 \exp(-n \left[ (r/b)^k - (a/b)^k \right])$$
 ( $\Upsilon \cdot$ )

جایی که a,  $b_0$  و  $h_0$  به ترتیب شعاع داخلی، شعاع خارجی و ضخامت اولیه دیسک در قسمت نمایی هستند. n و k نیز پارامترهای هندسی میباشند. اگر مقدار n صفر باشد، دیسک ضخامت ثابت و برای kهای کوچک و nهای بزرگ (برای مثال ۲/۷ و k = 1/4 و r = 1) دیسک مقعر و برای kهای بزرگ و nهای کوچک (برای مثال 0/1 و (r = 1)) دیسک محدب میشود. از طرفی n ضخامت دیسک در انتهای قسمت نمایی را نسبت به  $h_0$  و k شکل پروفیل را مشخص میکند. البته این دو پارامتر بر هم بی تاثیر نیز نیستند.

مشخصات هندسی دیسک در جدول ۱ آمده است. با توجه به شکل ۴ و رابطه (۳۰)، به منظور مدلسازی توزیع ضخامت نمایی، n=0.77 و k = 1 انتخاب میشود.

بنابراین با استفاده از دو دیسک ضخامت ثابت و یک دیسک با ضخامت نمایی، توزیع ضخامت به صورت شکل ۵ است. دیسک ضخامت ثابت داخلی، ریم داخلی و دیسک ضخامت ثابت خارجی، ریم خارجی نامیده میشوند. ضخامت ریم داخلی، بزرگتر از ضخامت ریم خارجی است.

هندسی دیسک	مشخصات	:1	عدول
------------	--------	----	------

مقدار	پارامتر (mm)
۲/۵	شعاع داخلی (r <sub>i</sub> )
۵۵/۶	شعاع خارجی (r <sub>o</sub> )
۱۵	شعاع ابتدایی جان (a)
۵۲/۵	شعاع انتهایی جان (b)



با توجه به شکل ۴ و رابطه (۳۰)، به منظور مدل سازی توزیع ضخامت نمایی، n = 0.77 و k = 1 انتخاب می شود؛ بنابراین با استفاده از دو دیسک ضخامت ثابت و یک دیسک با ضخامت نمایی، توزیع ضخامت به صورت شکل ۵ است.



نحوه <sub>توزیع</sub> T. E. γ و V در دیسک توزیع دما از سوراخ تا تاج دیسک به صورت خطی و همانند رابطه (۳۱) در نظر گرفته میشود.

$$T = A \cdot r + B \tag{(11)}$$

جایی که A و B با توجه به شرایط مرزی ارایه شده در (۳۲) مشخص می شوند:

$$T(r_i) = T_i$$

$$T(r_o) = T_o$$
(°Y)

ماده مورد استفاده برای این دیسک، سوپرآلیاژ اینکونل ۷۱۸ است. خواص فیزیکی و مکانیکی متغیر با دمای این ماده از مرجع[۲۲] استخراج گردیده است. برای استفاده از منحنیهای خواص، ابتدا لازم است که این منحنیها به دادههای عددی تبدیل شوند. برای انجام این کار از نرمافزار اینگیج دیجیتایزر<sup>۵</sup> استفاده شدهاست. برای

این منظور داده ا به صورت قطعه به قطعه خطی در نظر گرفته شده اند. وظیفه درون یابی داده ها بر عهده یک زیر برنامه بنام اینتر پولیت<sup>۶</sup> است که در هر نقطه از فضای طراحی مقادیر مشخصات مادی را محاسبه می کند. منحنی های تغییرات این خواص بر حسب دما در شکل های ۶ و ۷ نشان داده شده اند. شکل ۶ خواص بر دما بر ضریب انبساط حرارتی سوپر آلیاژ اینکونل ۷۱۸ و شکل ۷ منحنی تاثیر دما بر مدول الاستیک این ماده را نشان می دهند.

طبق تغییرات ارایه شده در شکل ۷ مقدار مدول الاستیسیته برابر ۱۵۳*Gpa* و به طور متوسط در نظر گرفته شده است. از طرفی با توجه به تغییرات کم ضریب پواسون، این پارامتر به صورت یک مقدار ثابت و برابر ۰/۳ فرض می شود. [۱۴]

پارامترهای سرعت دورانی، چگالی ماده و دما در سوراخ و تاج دیسک نیز در جدول ۲ تعریف شدهاند.



0 200 400 600 800 1000 1200 1400 : Temperature (K)

شکل ۷: تاثیر دما بر مدول الاستیک اینکونل ۷۱۸

دیسک	مشخصات	تعريف	:۲	جدول
------	--------	-------	----	------

مقدار	پارامتر
54	( $arphi(\mathit{rpm})$ ) سرعت دوران
1771	چگالی ( p(kg / m³) ) چگالی
٧٠٠	دمای سوراخ دیسک ( T <sub>i</sub> (k )
٩٧٠	دمای تاج دیسک ( T <sub>o</sub> (k )

شرایط مرزی دیسک مورد بررسی از جنس نیرو هستند و به همین دلیل شرایط مرزی تغییر مکان در رابطه (۲۷) مجهول در نظر گرفته شدند و پس از حل مساله به دست میآیند. نیروهای موجود درشعاعهای داخلی و خارجی دیسک به صورت جدول ۳ ارایه میشوند.

جدول ۳: شرایط مرزی در شعاعهای داخلی و خارجی				
مقدار	پارامتر ( N)			
-171•	نیرو در شعاع داخلی			
301.	نیرو در شعاع خارجی			

با توجه به هندسه دیسک، میتوان دو لبه ابتدایی و انتهایی را به عنوان دو دیسک ضخامت ثابت در نظر گرفت که دارای حل تحلیلی هستند. همچنین با یافتن معادله تغییر مکان قسمت میانی با استفاده از روش هموتوپی، سه معادله تغییر مکان وجود دارد. با برابر قراردادن تغییر مکانها در نقاط تغییر هندسه از ضخامت ثابت به نمایی و بالعکس یا به عبارتی دیگر استفاده از روابط (۳۱):

$$u_A = u_B \tag{(11)}$$
$$u_C = u_D$$

$$\sigma_{r,A} = \sigma_{r,B}(h_B / h_A)$$

$$\sigma_{r,C} = \sigma_{r,D}(h_D / h_C)$$
(TY)

فرآيند حل مساله انجام مىشود.

## ۵- نتایج حاصل از تحلیل دیسک به روش هموتوپی

با توجه به اهمیت انتخاب پارامتر h در روش هموتوپی، نمودار u بر حسب h و r، در شکل  $\lambda$  رسم شده است. با توجه به این h سر حسب h و r، در شکل  $\lambda$  رسم شده است. با توجه به این شکل می توان پی برد که در بازه ( $(-\cdot/۶, \cdot/1)$ ) تغییرات u با ا ناچیز است. بنابراین پارامتر h باید در این محدوده انتخاب شود. از آن جایی که با انتخاب پارامتر h، رابطه u حاصل باید در معادله  $(-\cdot/۶, \cdot/1)$  مدق کند، برای مقادیر مختلفی از h در بازه  $(-\cdot/۶, \cdot/5, -)$ ، تغییرات باقی مانده بر حسب r مورد بررسی قرار گرفته است. بدیهی است که مقداری از h قابل قبول است که کمترین باقی مانده را به دنبال داشته باشد. پس از بررسی، مقدار  $(-\cdot/7) - (-\cdot/7) - (-\cdot/7)$ 

با در نظر گرفتن هندسه دیسک مورد بررسی شامل دو دیسک ضخامت ثابت و یک دیسک با تغییرات ضخامت نمایی، اعمال روش هموتوپی به همراه اثرات حاصل از تغییرات دما و اعمال شرایط مرزی، توزیع تنش و جابجایی در دیسک به دست میآید. شکل۹ منحنیهای توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش هموتوپی را

نشان میدهد. شکل ۱۰ نیز منحنی تغییر مکان همین دیسک را به روش هموتوپی نشان میدهد.





در روش المان محدود دیسک دوار غیرهمگن با ضخامت متغیر به تعداد محدودی حلقه تجزیه می شود. هر حلقه تحت فشار داخلی، فشار خارجی، نیروی گریز از مرکز و تغییرات دما می باشد. برای چنین حلقه ای، از تغییرات ضخامت و خواص ماده صرف نظر می شود. در این روش که در مرجع [۲۳] توضیح داده شده است جابجایی شعاعی را برای مرز داخلی و خارجی دیسک به صورت رابطه ۳۳ ارایه می شود.

که در آن:

$$a_{11} = \frac{1+\nu}{E} \frac{-r_i^3}{r_o^2 - r_i^2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{r_o^2}{r_i^2} \right)$$

$$a_{12} = \frac{2}{E} \frac{r_i r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$
(°f)

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\frac{1}{E} \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} \\ a_{22} &= \frac{1 + \nu}{E} \frac{r_o^3}{r_o^2 - r_i^2} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \frac{r_i^2}{r_o^2} \right) \\ b_1 &= \frac{2r_i}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} \xi \alpha T d\xi \\ b_2 &= \frac{2r_o}{E} \int_{r_i}^{r_o} \xi \alpha T d\xi \end{aligned}$$
(7b)

$$\begin{aligned} r_{o}^{2} &- r_{i}^{2} J_{r_{i}}, \text{ where,} \\ d_{1} &= \frac{\rho}{8E} \omega^{2} r_{i} (2r_{i}^{2} + 6r_{o}^{2} - 2\nu r_{i}^{2} + 2\nu r_{o}^{2}) \\ d_{2} &= \frac{\rho}{8E} \omega^{2} r_{o} (2r_{o}^{2} + 6r_{i}^{2} + 2\nu r_{i}^{2} \\ &- 2\nu r_{o}^{2}) \end{aligned}$$
(79)

برای آن که بتوان اثرات ضخامت را لحاظ کرد، تنش شعاعی و محیطی بهصورت زیر بیان میشود:

$$\sigma_r = \frac{F_r}{h}, \quad \sigma_\theta = \frac{F_\theta}{h} \tag{(4.17)}$$

که در آن Fr و Fo به ترتیب نیروهای شعاعی و محیطی بر واحد طول بوده و h نیز ضخامت هر کدام از رینگهای مورد استفاده است. با جایگذاری رابطه۳۷ در رابطه۳۳می وان نوشت:

$$h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \{ \begin{matrix} u_i \\ u_o \end{matrix} \} = \{ \begin{matrix} F_{ri} \\ F_{ro} \end{matrix} \}$$

$$+ h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \{ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \}$$

$$+ h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \}$$

$$+ h \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \}$$

$$H = h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \}$$

سازگاری جابجایی در مرزها، معادله کلی۱۹ بدست خواهد آمد، که یک دستگاه معادلات خطی میباشد: [K] = F + [K]B + [K]D (۳۹)

که در آن K، U، K و D فرم سرهم بندی شده پارامترهای موجود درمعادله ۳۸ می باشند. معادله ۳۹ برای یافتن بردار U حل می شود، سپس با استفاده از معادله ۳۸ می توان مقدار نیرو به واحد طول را برای هریک از رینگها محاسبه نمود. با استفاده از نیروها، تنش های شعاعی و محیطی محاسبه می شوند.

نتایج حاصل از روش کد المان محدود [۲۳] در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ ارایه شدهاند. شکل ۱۱ منحنیهای توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش کد المان محدود و شکل ۱۲ نیز منحنی تغییر مکان همین دیسک را به روش کد المان محدود نشان میدهند. با مقایسه نتایج حاصل از روش هموتوپی با نتایج حاصل از روش کد المان محدود میتوان پی برد که این دو روش دارای تطبیق قابل قبولی با یکدیگر هستند. در جدول ۴ مقادیر بیشینه تنش و تغییر مکان روش هموتوپی و روش کد المان محدود مقایسه شدهاند؛ بررسی این جدول نیز نشان گر اختلاف کم بین نتایج حاصل از دو روش میباشد.



شکل ۱۱: منحنیهای توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش کد المان



جدول ۴: مقایسه مقادیر بیشینه تنش و تغییر مکان

یشینه <sub>u</sub> (m)	$\sigma_{ heta}$ بیشینه ( Mpa )	$\sigma_r$ بیشینه ( Mpa )	نوع تحليل
۶/۳۶ × ۱۰ <sup>-۴</sup>	۷۵۵	١٠٨٣	روش کد المان محدود
$8/22 \times 10^{-1}$	۷۸۶	1174	روش هموتوپی
•/١	۴/۱	٣/٨	خطا (./)

در این بخش جهت درک بیشتر از روند تغییرات پارامترها در دیسک ضخامت متغیر، به مقایسه نتایج دیسک حاضر با سایر دیسکها پرداخته میشود. دیسکهایی که در این مرحله در نظر گرفته میشوند، دیسک هایپربولیک و ضخامت ثابت مطابق شکل ۱۳ و شکل ۱۴ هستند. شکل۱۳ توزیع ضخامت هایپربولیک و شکل۱۴ توزیع ضخامت ثابت دیسک را نشان میدهند. کلیه خواص و پارامترهای مربوط به دیسک همانند دیسک نمایی مورد تحلیل در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه توزیع ضخامت ثابت و هایپربولیک دارای حل تحلیلی هستند، حل ارایه شده یک حل دقیق است.

تابع تغییرات ضخامت در دیسک هایپربولیک به صورت رابطه (۴۰) ارایه می شود:

$$h = h_i(\rho)^a \tag{(f.)}$$

 $\frac{h_i}{h_e} = (\frac{r_e}{r_i})^{-a}$  شعاع بی بعد است و a با استفاده از  $\rho = \frac{r}{r_e}$  شعاع بی بعد است و  $h_i$  مشخص می شود.  $h_e, r_i, r_e$  و  $h_e, r_i, r_e$  مشخص می فارجی و داخلی بخش و داخلی و ضخامت در شعاعهای خارجی و داخلی بخش هاییربولیک هستند.

پس از جای گذاری توزیع ضخامت در دو حالت ثابت و هایپربولیک در رابطه (۶) و در نظر گرفتن شرایط مرزی و تغییرات سایر پارامترها همانند بخش ۴-۲ و ۴-۳، حل دقیقی از معادله حاصل





شکل۱۵ مقایسه تنش شعاعی در توزیعهای ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل را نشان میدهد. مقایسه تنش محیطی در توزیعهای ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل نیز در شکل۱۶ نشان داده شده است. مقایسه تغییر مکان در توزیعهای ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل در شکل۱۷ آمده است.

مطابق شکل۱۵ و شکل۱۶ روند تغییرات تنش شعاعی و محیطی در دو دیسک نمایی و هایپربولیک، به خصوص در مقادیر ابتدایی و انتهایی به هم نزدیک هستند. روند تغییرات تنش شعاعی در دیسک نمایی به صورت کاهشی است ولی در دیسک هایپربولیک با شیب کمتر و ملایمتر در قسمت انتهایی و با اختلاف کمی نسبت به دیسک نمایی کاهش مییابد. کاهش تغییرات تنش محیطی به گونهای است که از شعاع ابتدایی دیسک، شروع به افزایش کرده و با گذر از نقطهی اوج تا شعاع انتهایی دیسک کاهش مییابد. مقادیر تغییر مکان در هر سه دیسک مورد بررسی نیز دارای روندی نزدیک و قابل قبول هستند.



DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0 ]

مقادیر تنشهای بیشینه و کمینه (شعاعی و محیطی) دیسک ضخامت ثابت نسبت به دیسک با توزیع هایپربولیک و در مقایسه با دیسک با توزیع نمایی، دارای اختلاف بیشتری هستند. این مورد همان گونه که با مقایسه توزیع ضخامت در شکل ۵، شکل ۱۳ وشکل ۱۴ مشاهده میشود، به دلیل اختلاف زیاد بین دو دیسک ضخامت ثابت و نمایی است. از طرفی در مقایسه مقادیر بیشینه میتوان پی برد که دیسک ضخامت ثابت عاملی برای افزایش تنشها است و استفاده از دیسک هایپربولیک یا نمایی بهتر از دیسک ضخامت ثابت است.



شکل ۱۶: مقایسه تنش محیطی در توزیعهای ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل \* 10\*



شکل ۱۷: مقایسه تغییر مکان در توزیعهای ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل

به دلیل نزدیک بودن هندسه دیسک هایپربولیک حاضر به دیسک نمایی، مقادیر حاصل از آنها با درصد خوبی به هم نزدیک هستند. بنابراین در صورتی که طراحی مفهومی مد نظر است و استفاده از دیسک هایپربولیک سبب اختلاف زیادی با هندسه دیسک مورد

بررسی نمیشود، میتوان به جای استفاده از روش هموتوپی و دیسک نمایی از حل دقیق و دیسک هایپربولیک استفاده کرد.

از	مختلفى	توزيعهاى	در	بيشينه	مقادير	مقايسه	جدول ۵:
----	--------	----------	----	--------	--------	--------	---------

ديسک مورد تحليل					
تغییر مکان بیشینه ( m )	تنش محیطی بیشینه ( Mpa )	تنش شعاعی بیشینه ( <i>Mpa</i> )	توزيع ضخامت		
ho/TD $ imes$ 1 · - F	۷۸۶	1174	نمایی		
۶/۳۰ × ۱۰ <sup>-۴</sup>	٨۶٣	۱۳۰۵	ثابت		
۷/۳× ۱۰ <sup>-۴</sup>	۸۳۲	1107	هايپربوليک		
• / <b>A</b>	٩/٧	18/1	درصد تغییرات ثابت نسبت به نمایی (٪)		
۱۵	۵/۸	۲/۵	درصد تغییرات هایپربولیک نسبت به نمایی (./)		

جدول ۵: مقایسه مقادیر کمینه در توزیعهای مختلفی از دیسک مورد

		تحليل	
تغيير مكان	تنش محيطى	تنش شعاعی	
كمينه	كمينه	كمينه	توزيع ضخامت
(m)	( <i>Mpa</i> )	( <i>Mpa</i> )	
$1/\Delta \times 1 \cdot e^{-F}$	۵۸۵	٨٧١	نمایی
$1/4 \times 1 \cdot -4$	۳۹۵	۵۳۰	ثابت
$\cdot / \Lambda \Delta \times 1 \cdot - F$	810	٨٩٠	هايپربوليک
\$/V	***/^	<b>29/2</b>	درصد تغييرات ثابت
,,,,	11/ω	1 (/1	نسبت به نمایی (٪)
			درصد تغييرات
۴۳/۳	۵/۱	r/r	هايپربوليک نسبت به
			نمایی (٪)

## ۶- نتیجهگیری

در این تحقیق روش تحلیل هموتوپی جهت بررسی نحوه توزیع تنش و تغییر مکان در دیسک دوار تحت بارگذاری حرارتی در موتور توربین گاز دریایی ارایه شد. روابط حاکم بر دیسک دوار تحت بارهای مکانیکی و گرادیان حرارتی، استخراج گردید و روش هموتوپی جهت حل معادلات حاکم پیادهسازی عددی شد. با توجه به اینکه حل دقیقی از رابطه توزیع ضخامت نمایی موجود نیست، استفاده از روش هموتوپی این امکان را فراهم می سازد تا در طراحی سازه دیسک تقریبی قابل قبول از نتایج حاصل شود. نتایج تحلیل تنش و تغییر مکان با استفاده از این روش با درصد خطای بسیار کم و در حدود ۴ درصد، انطباق قابل قبولی با روش المان محدود دارند. لذا این روش می تواند در زمان کمتر و صرف هزینه کمتر 12- Zenkour, A. M. and Allam, M. N. M., (2006), *On the rotating fiber-rein forced viscoelastic composite solid and annular disks of variable thickness*, International Journal of Computer Methodology Engineering Sciences, Vol. 7, p. 21-31.

13- Vincenzo Vullo, Francesco Vivio, (2008), *Elastic* stress analysis of non-linear variable thickness rotating disks subjected to thermal load and having variable density along the radius, International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, p. 5337–5355.

14- Vullo, V., Vivio, F., (2013), *Rotors: Stress Analysisand Design*, McGraw Hill.

15- Hojjati, M.H., Jafari, S., (2008), Semi-exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian's decomposition methods. Part I: Elastic solution, International Journal of Pressure Vessels and Piping Vol. 9, p. 871–878.

16- Nie, G.J., Batra, R.C., (2010), Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness, Composite Structures, Vol. 11, p. 92 720–729.

17- Bayat, M., et al., (2009), *Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads*, International Journal of Pressure Vessels and Piping Vol. 86, p. 357–372.

18- Zenkour, A. M., Mashat, D. S., (2010), *Analytical and Numerical Solutions for a Rotating Annular Disk of Variable Thickness*, Applied Mathematics, Vol. 21, p. 431-438.

19- Hassani, A., et al, (2012), *Thermo-mechanical* analysis of rotating disks with non-uniform thickness and material properties, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.9, p. 95-101.

20- Liao, S., (2004), *Beyond perturbation introduction to the homotopy analysis method*, A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C.

21- Sedighi, H. M., Shirazi, K. H., (2011), Using homotopy analysis method to determine profile for disk cam by means of optimization of dissipated energy, International Review of Mechanical Engineering, Vol. 5, p. 55-61.

22- Eraslan, A. N., (2011), *Metallic materials* properties development and standardization (*MMPDS-06*), Federal Aviation Administration.

23- Shahriari, B., et al, (2014), *Optimization of the Second Stage Disk's Structure for the Turbine of J85-*21-GE Aero Gas Turbine Engine, Journal of aerospace propulsion, Vol.1, p. 106-115. جهت تحلیل تنش و کرنش دیسک به کار گرفته شود. کارایی این روش به ویژه در مرحله طراحی مفهومی سازه دیسک که نیاز به صرف زمان و هزینه کمتر است دارای اهمیت ویژهای است؛ هرچند میتواند در کنار روش المان محدود در مرحله طراحی تفصیلی سازه نیز به کار گرفته شود. نشان داده شد که میتوان تغییرات ضخامت را همراه با دو ریم ابتدایی و انتهایی و همراه با تغییرات دما و پارامترهای متاثر از آن به طور همزمان در نظر گرفت و تحلیل دیسک را با دقت مناسب انجام داد.

کلید واژگان

1- Homotopy

2- Hypergeometric

3- Functionally graded

4- Runge-kutta

5- Enguage Digitizer

6- Interpolate

۷- مراجع

1- Rangwala, A. S., (2005), *Turbo-Machinery Dynamics: Design and Operations*, McGraw Hill.

2- Woodyard, D., (2004), *Pounder's marine diesel* engines and gas turbines, 8th ed., Butterworth-Heinemann.

3- Walsh, P. P., Fletcher, P., (2004), *Gas Turbine Performance*, Second Edition, Blackwell.

4- Al-Ahmadi, S. A., (2011), Numerical Comparison of Methods for Solving the BVP of Rotating Variable Thickness Disk, Master Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science King Abdul Aziz University.

5- Timoshenko, S.P., (1956), Strength of Materials, Part II, third ed. D. Van Nostrand Co., Princeton (NJ).
6- Manson, S. S., (1947), the determination of elastic stresses in gas-turbine disks, NACA. Report. No. 871, p. 241–251.

7- Fenner, R.T., (1987), *Finite Element Methods for Engineers*, the Macmillan Press Ltd, London.

8- Apatay, T. and Eraslan, A. N., (2003), *Elastic deformations of rotating parabolic disks: an analytical solution*, *J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.*, Vol. 18, p. 115–135.

9- Eraslan, A. N., (2005), Stress distributions in elastic–plastic rotating disks with elliptical thickness profiles using Tresca and von Misses criteria, ZAMM. Vol. 85, p. 252–266.

10- Eraslan, A. N. and Orcan, Y., (2002), *Elastic*plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness, Mechanic of Material, Vol. 34, p. 423–432.

11- Zenkour, A. M., (2006), *Thermoelastic solutions* for annular disks with arbitrary variable thickness, Structural Engineering Mechanic, Vol. 24, p.515-528.