تحلیل تنش دیسک توربین موتور توربین گاز دریایی تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از روش هموتوپی

بهروز شهریاری[۱*]، حسین مروج برزانی[۲]، شهرام یوسفی[۳]

[۱] دکتری ، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر؛ shahriari@mut-es.ac.ir
[۲] کارشناس ارشد، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی امیر کبیر؛ moravejhossein@aut.ac.ir
[۳] دانشیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر؛ Yousefi100@mut-es.ac.ir

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۷/۱۰
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۲۳

کلمات کلیدی:
توربین گاز دریایی
دیسک دوار توربین
بارگذاری حرارتی و مکانیکی
تحلیل تنش
روش هموتوپی

چکیده

دیسک دوار در موتور توربین‌گاز دریایی یکی از اجزای بحرانی است که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی مختلف قرار دارد. در این تحقیق روش هموتوپی[۱] جهت تحلیل تنش این دیسک دوار ارایه می‌شود. اعمال بارگذاری حرارتی در دیسکی با توزیع ضخامت نمایی با استفاده از روش هموتوپی و لحاظ نمودن تغییرات خواص فیزیکی و مکانیکی با دما، مهم‌ترین جنبه‌های نوآوری تحقیق را تشکیل می‌دهند. تغییرات ضخامت دیسک به صورت نمایی و دو ریم داخلی و خارجی دیسک به صورت ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شوند. پارامترهای مهم و تاثیرگذار در روش هموتوپی انتخاب و به کار گرفته شده‌اند. سپس به مقایسه نتایج و اعتبارسنجی با روش کد المان محدود پرداخته شده است. در نهایت توزیع تنش در دیسک‌هایی با توزیع ضخامت ثابت، نمایی و هایپربولیک در نظر گرفته شده و به مقایسه، بحث و نتیجه‌گیری پرداخته شده است. نتایج حاکی از کارایی روش با دقت قابل قبول جهت تحلیل دیسک‌های دوار تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی در موتور توربین گاز است.

Stress Analysis of Marine Gas Turbine Engine Turbine Disk Subjected to Thermal Load Using Homotopy Method

Behrooz Shahriari[1*], Hosssein Moravej Barzani[2] ,Shahram yousefi[3]

[1]*Phd., Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology*, shahriari@mut-es.ac.ir
[2]*Msc, Department of Aerospace Engineering, Amir Kabir University of Technology, moravejhossein@aut.ac.ir*
[3]*Associate professor, Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Yousefi100@mut-es.ac.ir*

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 1 Oct. 2016
Accepted: 15 Oct. 2017

Keywords:
Marine gas turbine
Turbine rotating disk
Thermal and mechanical loading
Stress analysis
Homotopy method

ABSTRACT

A marine gas turbine rotating disk is one of the most critical components which operates under nonstationary varying mechanical and thermal loads. In this research, the homotopy method is used for stress analysis of rotating disk subjected to thermal load. Apply the thermal loading on the disk with exponential thickness distribution by using the homotopy method and Considering the physical and mechanical properties variations with temperature, are the most important aspects of innovation in this paper. Disc thickness variations are considered exponential and the inner and outer rims of disk are considered constant thickness. Due to the use of homotopy analysis method, important and effective parameters in this method are selected and presented. Furthermore, results are compared and validated with finite element code and good agreement of results with this method is showed. Finally, stress distribution in disks with constant, exponential and hyperbolic thickness distribution are considered and compared. The results showed the efficiency and acceptable accuracy of the method for analysis of rotating disk subjected to thermal and mechanical loading.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

۱- مقدمه

توربین‌های گازی مولدهای پر قدرتی هستند که مقدار زیادی انرژی را به نسبت وزن و ابعادشان تولید می‌کنند. این توربین‌ها از گذشته تا کنون کاربردهای زیادی در صنایع زمینی، هوایی و دریایی داشته‌اند. وزن کم و امکان استفاده از چندین نوع سوخت نظیر گاز طبیعی، سوخت دیزل و متان این مولدها را برای کاربرد در سکوهای نفتی و ساحلی و کشتی‌ها مناسب می‌سازد. هر چند این موتورها بیشتر به علت استفاده در هواپیما معروف شده‌اند، اما در حمل و نقل زمینی، دریایی و کاربردهای ثابت مثل نیروگاه‌ها بیشترین تنوع در ترکیب را دارا بوده و در حال توسعه هستند.

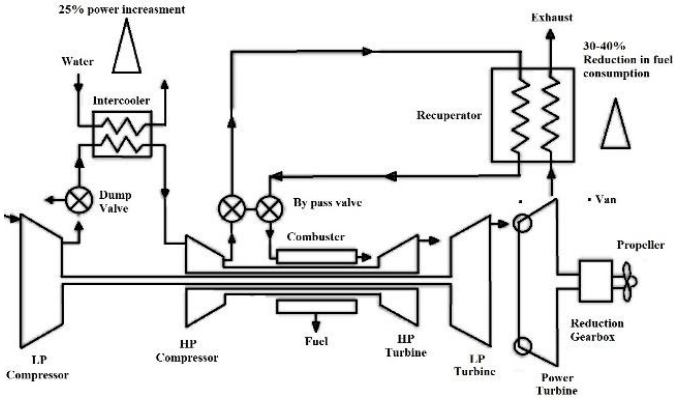
کاربرد توربین‌های گازی به عنوان نیروی پیشران کشتی در کشورهای صنعتی همواره در حال توسعه بوده و پیشرفت آن در سال‌های اخیر شدت بیشتری به خود گرفته است. از زمان تعریف توربین گاز به عنوان یک واحد پیشران دریایی در سال ۱۹۴۷ وقتی که نیروی دریایی سلطنتی بریتانیا یک توربین گاز با توان ۲۵۰۰ اسب بخار را در یک ناو کوچک توپدار به کار برد، گسترش در این زمینه وجود داشته است. این موتورها در ابتدا در شناورهای کوچک و قایق های تندرو مورد استفاده قرار گرفتند و پس از آن در ناوچه‌ها و ناوشکن‌ها گسترش یافتند. کاربرد دیگر آنها در سیستم‌های تولید برق کمکی در کشتی است. سال ۱۹۶۶ سرآغاز یک عصر جدید در مهندسی کشتی‌های جنگی بود. زمانی که هیات مدیره اداره نیروی دریایی بریتانیا تبدیل ناوچه کلاس بلک وود، اچ.ام. اس را به کشتی جنگی کاملا قدرتمند شده به کمک توربین‌های گازی سبک جهت تجهیز نیروی دریایی سلطنتی به تصویب رسانید.

به طور کلی مزایای استفاده از توربین گازی دریایی به جای سایر موتورها دریایی را به صورت ذیل می‌توان بیان نمود [۱، ۲، ۳]:

- نسبت‌های توان به وزن و توان به حجم بالا: این موتورها نسبت توان به وزنشان حداقل ۴ برابر موتورهای دیزل سرعت متوسط است. اشغال فضای کم و کم بودن وزن، فضای کاری را برای فعالیت‌های دیگر آزاد می‌سازد. به طور مثال موتور توربین گازی LM2500 جنرال الکتریک با توان متوسط حدود kw ۲۷۰۰۰، دارای ۷۵/۴ متر طول و ۱/۶ متر قطر و وزنی برابر ۳/۵ تن می‌باشد.
- کاهش سر و صدا و ارتعاشات
- آسانی نصب و سرویس که با طراحی مدولار و تجمیع سیستم‌های پشتیبان و کنترل موتور حاصل می‌شود.
- هزینه‌های نگهداری نسبتا کم، نیازمندی کم به قطعات یدکی و آسانی تعویض قطعات
- سازگاری با محیط زیست (انتشار NO_x و SO_x کمتر نسبت به موتورهای دیزل)
- کاهش نیاز به نیروی انسانی و اپراتوری با کاملا خودکار کردن موتور

-انعطاف عملکردی و کاربری آسان: استارت سریع؛ عدم نیاز به گرم شدن و کارکردن بدون بار اولیه موتور با شتاب‌گیری سریع موتور (موتور در ۳۰ ثانیه به دور کاری خود می‌رسد)؛ پس از خاموش شدن موتور کاهش شتاب به سرعت انجام می‌پذیرد؛ قابلیت استارت ثانویه حتی بعد از خاموش شدن موتور پس از کار زیاد (بدون محدودیت نیاز به خنک شدن موتور).

یک توربین گاز دریایی با سیکل پیشرفته عرضه شده در بازار، WR-21 است که توسط شرکت نورث روپ گرومن در آمریکا و شرکت رولزرویس با پشتیبانی نیروی‌های دریای آمریکا، انگلیس و فرانسه در دهه۹۰ توسعه پیدا کرد. این موتور نخستین موتور توربین مشتق شده از موتورهای هوایی RB211 و ترنت است که مجهز به سیکل ICR، یعنی خنک‌کننده داخلی کمپرسور و بازیاب گرما جهت کاهش مصرف سوخت ویژه (SFC) به بیش از ۳۰ درصد نسبت به سیکل‌های ساده توربین گاز است (شکل‌های۱ و ۲). همان‌طور که در شکل۱ مشاهده می‌شود این موتور دارای یک کمپرسور فشار پایین (LP) و یک کمپرسور فشار بالا (HP) است که گرداننده هر کدام از این کمپرسورها به ترتیب توربین فشار پایین (LP) و توربین فشار بالا (HP) هستند. هوا ورودی موتور پس از عبور از کمپرسور فشار پایین به جای ورود مستقیم به کمپرسور فشار بالا، وارد یک سیستم خنک‌ساز میانی می‌شود. خنک‌سازی در این سیستم توسط آب انجام می‌شود. این عملیات سبب افزایش توان به میزان ۲۵ درصد می‌گردد. هوای خروجی از کمپرسور فشار بالا نیز قبل از ورود به محفظه احتراق، با ورود به رکوپراتور که یک مبدل حرارتی با جریان متقابل است، پیش‌گرم می‌شود. گرمای مورد نیاز این مبدل حرارتی از خروجی توربین فشار پایین تامین می‌شود.

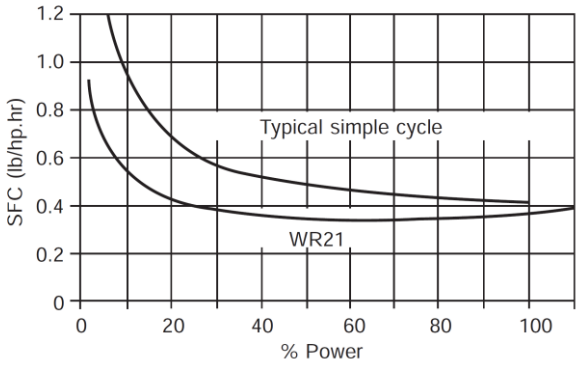


شکل ۱: توربین گاز دریایی WR-21 با سیکل پیشرفته ICR [۲]

در شکل۲ کاهش مصرف سوخت در موتور توربین گاز دریایی WR-21 مجهز به سیکل ICR نسبت به موتور توربین گاز با سیکل ساده

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

نشان داده شده است. در واقع عملیات پیش‌گرم در رکوپراتور باعث کاهش ۳۰ تا ۴۰ درصدی مصرف سوخت می‌شود.

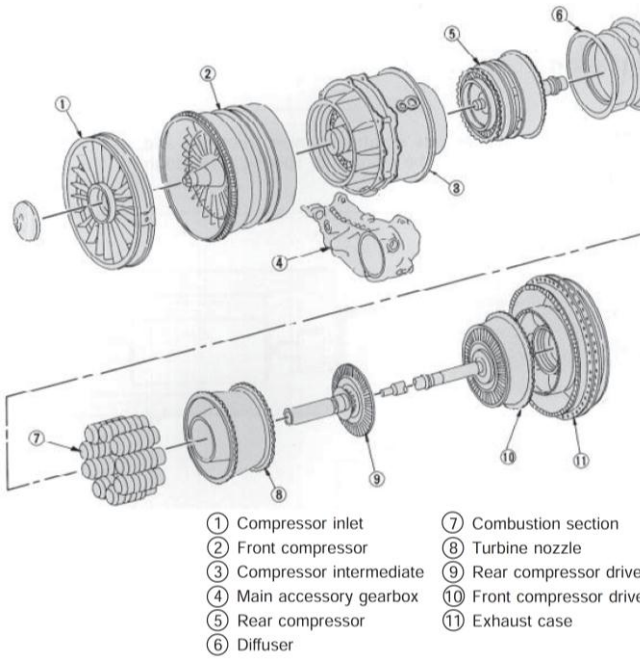


شکل ۲: کاهش مصرف سوخت در موتور توربین گاز دریایی WR-21 مجهز به سیکل ICR نسبت به موتور توربین گاز با سیکل ساده[۲]

در یک نوع ناوچه متعلق به نیروی دریایی هلند از ترکیب موتور دیزل و توربین گاز استفاده شده است. این ناوچه برای پدافند هوایی در پلت فرم عادی طراحی شده و قادر به انجام عملیات طولانی مدت در دریا است. هر یک از این ناوچه‌ها دارای دو توربین گاز رولزرویس و دو موتور دیزل است. توربین‌های گاز در قسمت جلوی اتاق موتور قرار گرفته‌اند و موتورهای دیزل در عقب اتاق هستند. موتور از طریق کنترل گام پروانه کشتی به وسیله یک گیربکس معمولی توان لازم برای حرکت کشتی را فراهم می‌کند. نیروی الکتریکی مورد نیاز کشتی هم از یک ژنراتور دیزلی جداگانه تامین می‌شود.

بخش‌های اصلی یک موتور توربین گاز دریایی مشتق شده از موتورهای هوایی در شکل ۳ نشان داده شده است. این بخش‌ها شامل ورودی کمپرسور، کمپرسور جلو، کمپرسور میانی، گیربکس، کمپرسور عقب، دیفیوزر، محفظه احتراق، نازل توربین، توربین راننده کمپرسور عقب، توربین راننده کمپرسور جلو و خروجی گاز می‌باشند. دیسک‌ها بخش مهمی از روتور توربین و کمپرسور هستند.

دیسک‌های دوار که تحت بارهای سطحی، حجمی و حرارتی قرار دارند در موتورهای توربین گاز کاربرد گسترده‌ای دارند. تحلیل تنش و کرنش این دیسک‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. از طرفی تعداد کمی از دیسک‌ها دارای هندسه‌ای ساده جهت مدل‌سازی هستند و معمولاً هندسه روتورها، پیچیده است [۴].



شکل ۳: بخش‌های اصلی یک موتور توربین گاز دریایی مشتق شده از موتورهای هوایی [۲]

روش‌های حل نیمه تحلیلی و عددی تنها راه‌های مورد استفاده جهت تعریف دقیق کمیت‌های اصلی و تعیین کننده برای طراحان هستند. تعداد کمی از مسایل مهندسی جهت تحلیل تنش و کرنش در حوزه الاستیک یا حتی فراتر از آن معادلاتی را ایجاد می‌کنند که جهت پیاده‌سازی پارامترها در قالب فرمول‌های جبری، به فرم بسته قابل حل هستند. صرف‌نظر از حالاتی که معادلات حاکم بر دیسک می‌توانند حل دقیق داشته باشند (دیسک ضخامت ثابت، دیسک هایپربولیک و دیسک استحکام ثابت)، در سایر موارد استفاده از روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی ضروری است و نتایج آن‌ها به‌خصوص برای مرحله طراحی مفهومی قابل قبول هستند.

تیموشنکو [۵] حل‌هایی تحلیلی از تنش و کرنش دیسک‌های خاص ارایه کرد. در زمینه روش‌های عددی، تحقیقات انجام شده توسط مانسون مورد توجه قرار گرفته و در این مورد می‌توان از کار او [۶] در رابطه با حل تفاضل محدود و با استفاده از معادلات تعادل و سازگاری در محدوده الاستیک نام برد. همچنین در زمینه اجزا محدود، می‌توان به کار انجام شده توسط فنر [۷] اشاره کرد.

در زمینه حل تحلیلی از دیسکی با توزیع ضخامت سهموی و بیضوی می‌توان به ترتیب به کار مشترک اپاتی و ارسلن [۸] و کار ارسلن [۹] اشاره کرد. در زمینه تغییرشکل الاستیک و پلاستیک، به کار ارسلن و ارکن [۱۰] که به بررسی تغییرشکل دیسک‌های توپر ضخامت متغیر با پروفیل همگرا و ارایه حل تحلیلی برای تغییرشکل الاستیک و پلاستیک دیسک توپر با توزیع نمایی پرداختند، می‌توان اشاره کرد.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

زنکور [۱۱] حل ترموالاستیکی برای دیسک‌های حلقوی ضخامت متغیر در نظر گرفت. همچنین زنکور و همکارانش [۱۲] به توسعه حل تحلیلی جهت بررسی تنش‌ها و تغییر شکل دیسک‌های توپر و حلقوی در شرایط ویسکوالاستیک و با مقاطع دلخواه ضخامت متغیر پرداختند.

ولو و ویوو [۱۳] به تحلیل دیسک‌های دوار ضخامت متغیر تحت بارهای حرارتی، با تغییر چگالی در راستای شعاع پرداختند. در این تحقیق با توجه به انتخاب شکل توانی معادله تغییر ضخامت، فرایند حل معادلات با استفاده از سری‌های دارای مرتبه هندسی بالا[۲] دنبال شد. اگر نسبت عبارات پی در پی از یک سری به صورت یک تابع گویا باشد، این سری از سری‌های دارای مرتبه هندسی بالا است و جهت حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. در حالتی که دیسک ضخامت متغیر دارای حل بسته (ضخامت ثابت، استحکام ثابت و هذلولوی) نباشد، سری‌های مرتبه هندسی بالا جهت حل معادلات به کار برده می‌شوند. البته در مورد دیسک تعریف شده با توزیع نمایی، دارای محدودیت‌هایی است و بسته به شکل نمایی انتخاب شده، متفاوت و یا اصلاً غیر قابل استفاده هستند[۱۴].

حجتی و جعفری [۱۵] دو روش اختلالات هموتوپی و آدومین را جهت تحلیل تنش و کرنش در دیسک دوار ضخامت و چگالی متغیر به کار بردند. در این کار تغییرات ضخامت به صورت توانی بوده و بدون در نظر گرفتن تغییرات دما و لبه‌های ابتدایی و انتهایی انجام شده است.

در زمینه مواد مدرج تابعی[۳]، می‌توان به کار نی و بترا [۱۶] اشاره کرد. در این تحقیق کلیه پارامترهای وابسته به دما به صورت تابعی از دما تعریف می‌شوند. حل مساله با تعریف تابع تنش و حل‌های تحلیلی و عددی انجام می‌شود. در رابطه با مواد مدرج می‌توان به کار بیات و همکارانش [۱۷] نیز اشاره کرد. در این تحقیق به منظور کاهش وزن سازه دیسک از مواد مدرج استفاده شده و پس از محاسبه تنش‌ها، نتایج حاصل با سایر دیسک‌ها (از لحاظ توزیع تنش و وزن) مقایسه و معایب دیسک‌های ضخامت ثابت بیان شده است.

زنکور و مشت [۱۸] دیسک‌های ضخامت متغیر را همراه با لبه‌های انتهایی و ابتدایی، با در نظر گرفتن تابع نمایی، با روش تفاضل محدود و بدون اثرات حرارتی مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق دیسک‌های توپر و حلقوی به طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفتند. تابع نمایی مورد استفاده جهت مدل‌سازی لبه‌ها و ضخامت دیسک به طور پیوسته و هم‌زمان به کار رفت و لبه‌های دیسک به صورت ضخامت ثابت مدل نشدند. در نظر گرفتن یک تابع جهت تحلیل لبه‌ها و ضخامت اصلی دیسک، باعث افزودن یا کاستن و به طور کلی تغییر هندسه دیسک می‌شود. از طرفی مشکل پرش تنش که در مسایلی با چند تابع مختلف و به خصوص در لبه‌های ابتدایی و انتهایی رخ می‌دهد، در این مورد وجود ندارد.

حسنی و همکارانش [۱۹] با استفاده از توابع توانی به تحلیل عددی و ترموالاستیک از دیسک‌های ضخامت، چگالی و دما متغیر پرداختند. روش‌های اجزا محدود و رانگ-کوتا[۴] جهت حل معادلات مورد استفاده قرار گرفتند. این تحقیق با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف و بدون لبه‌های انتهایی و ابتدایی انجام شد. با توجه به این‌که دیسک روتور دارای لبه‌های انتهایی و ابتدایی است، مدل‌سازی این لبه‌ها ضروری بوده و عدم بررسی آن‌ها دقت مساله را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

مروری بر تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد که تا امروز، تحلیل‌های بسیاری بر دیسک‌های ضخامت متغیر انجام شده و پیشرفت‌های چشم‌گیری صورت گرفته است. اما تعریف کامل هندسه برخی دیسک‌ها مستلزم استفاده از چند تابع مختلف است و در صورتی که این توابع به درستی و همراه با هم تعریف نشوند، دقت حل تحت تاثیر قرار می‌گیرد. لذا تعریف و استفاده از این توابع برای برخی از دیسک‌ها، امری مهم و ضروری است.

در تحقیق حاضر به منظور تحلیل سازه دیسک و جهت تعریف کاملی از هندسه، ناچار به تعریف چند تابع مختلف است که هر کدام بخشی از هندسه را مدل می‌کنند. پارامترهایی هم‌چون مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و غیره که تابعیت از دما دارند، با این توابع مختلف از تعریف هندسه همراه می‌شوند و مساله مورد حل را تشکیل می‌دهند. در ادامه جهت حل معادلات و در مرحله طراحی مفهومی از روش تحلیل هموتوپی[۴] که فرمول‌بندی و دقت مناسبی از مساله را نسبت به روش اختلالات هموتوپی فراهم می‌سازد، استفاده می‌شود.

۲- معادلات ترموالاستیسیته حاکم بر دیسک دوار

دیسک دواری با سرعت زاویه‌ای ω و تحت بارگذاری حرارتی در راستای شعاع در نظر گرفته می‌شود. چون که نیروها توابعی از شعاع و متقارن فرض می‌شوند، تنش برشی برابر صفر بوده و تنش‌های شعاعی و مماسی توابعی از شعاع هستند. از طرفی به دلیل نازک بودن دیسک، فرض تنش صفحه‌ای برای مساله مورد بررسی در نظر گرفته شده است. معادله تعادل دیسکی دوار به صورت (۱) نوشته می‌شود.

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r.h.r)-\sigma_t.h+\gamma.\omega^2.r^2.h=0 \qquad (۱)$$

جایی که σ_r و σ_t به ترتیب تنش‌های شعاعی و مماسی، h تغییرات ضخامت (تابعی از شعاع)، r شعاع و γ جرم بر واحد حجم یا همان چگالی است.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

روابط کرنش – جابجایی در دیسک دوار و برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت (۲) هستند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{dU}{dr} \\ \varepsilon_t = \dfrac{U}{r} \end{cases} \qquad (۲)$$

جایی که U نشان‌گر تغییر مکان است.
با توجه به رابطه تنش-کرنش (۳):

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_t) + \alpha T \\ \varepsilon_t = \dfrac{1}{E}(\sigma_t - \nu\,\sigma_r) + \alpha T \end{cases} \qquad (۳)$$

می‌توان به رابطه (۴)دست یافت.

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_r - \alpha T) + \nu\,(\varepsilon_t - \alpha T)\right] \\ \sigma_t = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_t - \alpha T) + \nu\,(\varepsilon_r - \alpha T)\right] \end{cases} \qquad (۴)$$

با ترکیب روابط (۴) و (۲):

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[(\dfrac{dU}{dr} - \alpha T) + \nu.(\dfrac{U}{r} - \alpha T)\right] \\ \sigma_t = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[(\dfrac{U}{r} - \alpha T) + \nu.(\dfrac{dU}{dr} - \alpha T)\right] \end{cases} \qquad (۵)$$

و جای‌گذاری روابط (۵) در رابطه تعادل (۱)، رابطه کلی (۶) برای دیسکی دوار، با پروفیل دلخواه و گرادیان دمایی غیر صفر در طول شعاع به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dr^2} + \left(\frac{1}{h}.\frac{dh}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{dU}{dr} + (\frac{\nu}{h.r}.\frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^2})U \\ &-(1+\nu).\alpha.(\frac{dT}{dr} + \frac{T}{h}.\frac{dh}{dr}) + (1-\nu^2).\frac{\gamma.\omega^2.r}{E} = 0 \end{aligned} \qquad (۶)$$

h، ν، E و T با توجه به مساله می‌توانند به صورت توابعی از شعاع بیان شوند. در صورتی که هر یک از پارامترها به صورت توابعی ثابت، سهموی، بیضوی، هذلولوی، نمایی و یا ترکیبی از آن‌ها تعریف شوند، فرایند و روش حل مساله متفاوت خواهد شد و مساله می‌تواند دارای حل تحلیلی یا تقریبی باشد.

۳- روش تحلیل هموتوپی

طی دهه‌های اخیر، لیائو [۲۰] به ارایه روش تحلیل غیرخطی با نام هموتوپی پرداخته است. این روش از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است؛ چرا که همواره مجموعه‌ای از پاسخ‌ها را در قالب یک پارامتر کمکی ارایه می‌دهد. روش تحلیل هموتوپی در زمینه‌های مختلف و گسترده‌ای همچون الکترواستاتیک، تیرها، انتقال حرارت پره‌ها و غیره جهت تحلیل غیرخطی به کار گرفته شده‌اند. در ادامه به ارایه تئوری حاکم بر این روش پرداخته می‌شود.

تئوری حاکم

معادله دیفرانسیل غیر خطی(۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$N[u(r,t)] = 0 \qquad (۷)$$

جایی که N عمل‌گری غیر خطی، $u(r,t)$ تابعی مجهول و r و t به ترتیب متغیرهای مستقل فاصله‌ای و زمانی هستند.
$u_0(r,t)$ حدس اولیه از حل دقیق $u(r,t)$، $h \neq 0$ پارامتری کمکی، $H(r,t) \neq 0$ تابعی کمکی و L عمل‌گری خطی است که اگر $f(r,t) = 0$ باشد:

$$L[f(r,t)] = 0 \qquad (۸)$$

با به کار بردن $q \in [0,1]$ به عنوان پارامتر تعبیه‌ای، هموتوپی به شکل رابطه (۹) تشکیل داده می‌شود:

$$H = (1-q)\{L[\varphi - u_0]\} - q\,h\,H\,N[\varphi] \qquad (۹)$$

جایی که:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(r,t;q) \\ u_0 &= u_0(r,t) \\ H &= H(r,t) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

پارامتر کمکی و غیر صفر h و تابع کمکی $H(r,t)$ در مرحله اول این روش، هموتوپی را تشکیل می‌دهند. بنابراین پارامتر h و تابع $H(r,t)$ نقش مهمی را در روش تحلیلی هموتوپی ایفا می‌کنند.
با صفر قراردادن رابطه هموتوپی (۹)، معادله تغییر شکل مرتبه صفر (۱۱) به‌دست‌می‌آید:

$$(1-q)\{L[\varphi - u_0]\} = q\,h\,H\,N[\varphi] \qquad (۱۱)$$

جایی که $\varphi(r,t;q)$ فقط به حدس اولیه $u_0(r,t)$، عمل‌گر خطی کمکی L، تابع کمکی $H(r,t)$ و پارامتر کمکی h وابسته نیست و به $q \in [0,1]$ نیز بستگی دارد. هنگامی که $q = 0$ باشد، رابطه (۱۱) به رابطه (۱۲) تبدیل می‌شود:

$$L[\varphi(r,t;0) - u_0(r,t)] = 0 \qquad (۱۲)$$

که طبق رابطه (۷)، رابطه (۱۳) به دست می‌آید:

$$\varphi(r,t;0) = u_0(r,t) \qquad (۱۳)$$

هنگامی که $q = 1$ باشد، از آنجایی که $h \neq 0$ و $H(r,t) \neq$ هستند، معادله تغییر شکل مرتبه صفر (۱۱) به معادله (۱۴) تبدیل می‌شود:

$$N[\varphi(r,t;1)] = 0 \qquad (۱۴)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

طبق رابطه (۷) و مانند رابطه (۱۳):

$$\varphi(r,t;1)=u\ (r,t) \tag{۱۵}$$

بنابراین، بر اساس روابط (۱۳) و (۱۴)، همزمان با افزایش q از ۰ تا ۱، $\varphi(r,t;q)$ به طور پیوسته از تقریب اولیه $u_0(r,t)$ تا حل دقیق $u(r,t)$ از معادله کلی (۷) تغییر می‌کند و به خاطر تغییرات پیوسته‌اش از تقریب اولیه به حل دقیق، تغییر شکل نامیده می‌شود. مشتقات تغییر شکل مرتبه m به صورت (۱۶) تعریف می‌شوند:

$$u_0^{[m]}(r,t)=\frac{\partial^m\varphi}{\partial q^m}]_{q=0} \tag{۱۶}$$

با استفاده از بسط تیلور، $\varphi(r,t;q)$ می‌تواند در قالب سری‌های توانی از q و به صورت (۱۷) بسط یابد:

$$\varphi(r,t;q)=\varphi(r,t;0)+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{u_0^{[m]}(r,t)}{m!}q^m \tag{۱۷}$$

با نوشتن $u_m(r,t)$ به صورت (۱۸):

$$u_m(r,t)=\frac{u_0^{[m]}(r,t)}{m!}=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\varphi(r,t;q)}{\partial q^m}]_{q=0} \tag{۱۸}$$

و با استفاده از رابطه (۱۳) و سری‌های توانی (۱۷)، رابطه (۱۹) به دست می‌آید:

$$\varphi(r,t;q)=u_0(r,t)+\sum_{m=1}^{+\infty}u_m(r,t)q^m \tag{۱۹}$$

انتخاب حدس اولیه $u_0(r,t)$، عمل‌گر خطی کمکی L و تابع کمکی اختیاری است. با انتخاب $q=1$:

$$u(r,t)=u_0(r,t)+\sum_{m=1}^{+\infty}u_m(r,t) \tag{۲۰}$$

رابطه (۲۰)، رابطه‌ای بین حل دقیق $u(r,t)$ و تقریب اولیه $u_0(r,t)$ و عبارت $u_m(r,t)$ است. به منظور یافتن معادلات حاکم بر $u_m(r,t)$، لیائو رابطه (۲۰) را در (۱۱) قرار داد و سپس با استفاده از ضرایب یکسانی که از q در روابط وجود داشت، رابطه (۲۱) را تشکیل داد: [۲۰]

$$L[u_m(r,t)-\chi_m u_{m-1}(r,t)]=hH(r,t)R_m(\vec{u_{m-1}},r,t) \tag{۲۱}$$

جایی که:

$$\chi_m=\begin{cases}0 & m\le 1\\ 1 & m>1\end{cases} \tag{۲۲}$$

$$R_m(u_{m-1},r,t)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}N[\varphi(r,t;q)]}{\partial q^{m-1}}]_{q=0} \tag{۲۳}$$

توجه به این‌که رابطه (۲۱)، رابطه‌ای خطی است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با یافتن تقریب‌های مرتبه $m-1$، R_m نیز به دست می‌آید. سپس با استفاده از $u_0(r,t)$، می‌توان $u_1(r,t)$، $u_2(r,t)$ و ... را نیز به دست آورد. بنابراین بر اساس معادله (۲۰)، مساله‌ای غیر خطی به بی‌نهایت زیر مساله خطی که با استفاده از رابطه (۲۱) به دست می‌آیند، تبدیل می‌شود [۲۱].

اگر ترم‌هایی بدون $\varphi(r,t;q)$ در معادله اصلی وجود داشته باشند، عبارت $hH(r)(1-\chi_m)$ در این ترم‌ها ضرب شده و با بخش غیر خطی جمع می‌شود.

هنگامی که تقریب اولیه $u_0(r,t)$، عمل‌گر خطی کمکی L و تابع کمکی $H(r,t)$ مشخص شوند، هنوز گستره انتخاب زیادی برای مقدار پارامتر کمکی h وجود دارد. بر خلاف سایر روش‌ها، تحلیل هموتوپی همواره مجموعه‌ای از پاسخ‌ها را در قالب پارامتر کمکی h به دست می‌آورد. بنابراین انتخاب h از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. جهت انتخاب مقدار صحیح h، تغییرات نمودار پاسخ بر حسب h اهمیت پیدا می‌کند و معمولاً از محدوده‌ای که مقدار پاسخ دارای تغییرات کمی باشد، انتخاب می‌شود.

در حالت کلی، مساله‌ای غیر خطی ممکن است توسط مجموعه‌ای از معادلات حاکم با شرایط اولیه یا مرزی مرتبط توصیف شود. با توجه به این‌که فرم معادله (۷) نیز کلی است و معادله حاکم بر مساله را مشخص می‌کند، این معادله می‌تواند معادله‌ای دیفرانسیلی، معادله‌ای انتگرالی، معادله‌ای انتگرال-دیفرانسیلی، یا معادله‌ای جبری باشد. همه معادلات حاکم و شرایط مرزی می‌توانند به روشی مشابه مورد بحث قرار گیرند. برای معادلات حاکم و شرایط مرزی متفاوت، باید تقریب‌های اولیه متفاوت و عمل‌گرهای خطی کمکی متفاوت انتخاب شوند و بدین ترتیب مساله مورد بررسی تشکیل شود. بنابراین، تقریب هموتوپی کلی و جامع است.

به منظور حل معادله (۶)، ابتدا عمل‌گر غیر خطی N تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}N[\varphi(r;q)]&=\frac{d^2\varphi(r;q)}{dr^2}+\left(\frac{1}{h}.\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi(r;q)}{dr}\\&+(\frac{\nu}{h.r}.\frac{dh}{dr}-\frac{1}{r^2}).\varphi(r;q)-(1+\nu).\alpha.(\frac{dT}{dr}+\frac{T}{h}.\frac{dh}{dr})\\&+(1-\nu^2).\frac{\gamma.\omega^2.r}{E}=0\end{aligned} \tag{۲۴}$$

از طرفی با تعریف رابطه (۲۴) از N، رابطه (۲۱) به صورت (۲۵) نوشته می‌شود:

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

$$
\begin{aligned}
&L[u_m(r)-\chi_m u_{m-1}(r)]= \\
&hH(r)\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}}[\frac{d^2\varphi(r;q)}{dr^2} \\
&+\left(\frac{1}{h}.\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi(r;q)}{dr}+(\frac{\nu}{h.r}.\frac{dh}{dr}-\frac{1}{r^2}).\varphi(r;q)]_{q=0} \\
&+h\,H(r)(1-\chi_m)(-(1+\nu).\alpha.(\frac{dT}{dr}+\frac{T}{h}.\frac{dh}{dr}) \\
&+(1-\nu^2).\frac{\gamma.\omega^2.r}{E})= \\
&=hH(r)\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}}[\sum_{k=0}^{\infty}[u_k''+\left(\frac{1}{h}.\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)u_k'] \\
&+(\frac{\nu}{h.r}.\frac{dh}{dr}-\frac{1}{r^2})u_k]\,q^k]_{q=0} \\
&+h\,H(r)(1-\chi_m)(-(1+\nu).\alpha.(\frac{dT}{dr}+\frac{T}{h}.\frac{dh}{dr}) \\
&+(1-\nu^2).\frac{\gamma.\omega^2.r}{E})= \\
&=hH(r)[u_{m-1}''+\left(\frac{1}{h}.\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)u_{m-1}'+(\frac{\nu}{h.r}.\frac{dh}{dr}-\frac{1}{r^2})u_{m-1}]+ \\
&+h\,H(r)(1-\chi_m)(-(1+\nu).\alpha.(\frac{dT}{dr}+\frac{T}{h}.\frac{dh}{dr}) \\
&+(1-\nu^2).\frac{\gamma.\omega^2.r}{E})
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

با توجه به اختیاری بودن انتخاب L و $u_0(r)$ و با توجه به مسایل حل شده با استفاده از روش هموتوپی، این توابع به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&L(\varphi(r;q))=\frac{\partial^2\varphi(r;q)}{\partial r^2} \\
&u_0(r)=c_0+c_1 r
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

جایی که با توجه به شرایط مرزی مجهول تغییر مکان در شعاع داخلی و خارجی، c_0 و c_1 به وسیله شرایط مرزی ارایه شده در رابطه (۲۷) مشخص می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&u_0(r_i)=\alpha \\
&u_0(r_o)=\beta
\end{aligned}
\tag{۲۷}
$$

طبق روابط قبل، $u_m(r)$ به صورت رابطه (۲۸) تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
u_m(r)=&c_{0_m}+c_{1_m}r+\chi_m u_{m-1}(r)+ \\
&+h\iint H(r)([u_{m-1}''+\left(\frac{1}{h}.\frac{dh}{dr}+\frac{1}{r}\right)u_{m-1}' \\
&+(\frac{\nu}{h.r}.\frac{dh}{dr}-\frac{1}{r^2})u_{m-1}]+ \\
&+(1-\chi_m)(-(1+\nu).\alpha.(\frac{dT}{dr}+\frac{T}{h}.\frac{dh}{dr})+ \\
&+(1-\nu^2).\frac{\gamma.\omega^2.r}{E}))\,dr\,dr
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

از طرفی با توجه به این‌که شرایط مرزی منطبق بر مساله در رابطه (۲۷) ارضا شدند، c_{0m} و c_{1m} نیز با شرایط ارایه شده در رابطه (۲۹) مشخص می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&u_m(r_i)=0 \\
&u_m(r_o)=0
\end{aligned}
\tag{۲۹}
$$

از طرفی $H(r)=1$ در نظر گرفته می‌شود. توابع h، ν، E ، α و T نیز با توجه به مساله تعریف می‌شوند.

۴- دیسک مورد تحلیل

هندسه دیسک مورد تحلیل مطابق شکل ۴ بوده که شامل یک بخش نمایی و دو بخش ضخامت ثابت می‌شود. این شکل پروفیل دیسک را نشان می‌دهد که در آن توزیع ضخامتی نمایی به صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$
h=h_0\exp(-n\,[(r/b)^k-(a/b)^k]) \tag{۳۰}
$$

جایی که a، b و h_0 به ترتیب شعاع داخلی، شعاع خارجی و ضخامت اولیه دیسک در قسمت نمایی هستند. n و k نیز پارامترهای هندسی می‌باشند. اگر مقدار n صفر باشد، دیسک ضخامت ثابت و برای kهای کوچک و nهای بزرگ (برای مثال k=۰/۷ یا k=۱/۵ و n=۲) دیسک مقعر و برای kهای بزرگ و nهای کوچک (برای مثال ۰/۵ و k=۲/۵) دیسک محدب می‌شود. از طرفی n ضخامت دیسک در انتهای قسمت نمایی را نسبت به h_0 و k شکل پروفیل را مشخص می‌کند. البته این دو پارامتر بر هم بی‌تاثیر نیز نیستند.

مشخصات هندسی دیسک در جدول۱ آمده است. با توجه به شکل ۴ و رابطه (۳۰)، به منظور مدل‌سازی توزیع ضخامت نمایی، $n=0.77$ و $k=1$ انتخاب می‌شود.

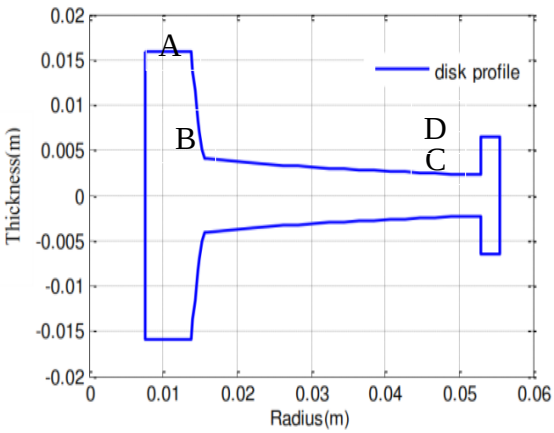
بنابراین با استفاده از دو دیسک ضخامت ثابت و یک دیسک با ضخامت نمایی، توزیع ضخامت به صورت شکل ۵ است. دیسک ضخامت ثابت داخلی، ریم داخلی و دیسک ضخامت ثابت خارجی، ریم خارجی نامیده می‌شوند. ضخامت ریم داخلی، بزرگتر از ضخامت ریم خارجی است.

جدول ۱: مشخصات هندسی دیسک

پارامتر (mm)	مقدار
شعاع داخلی (r_i)	۷/۵
شعاع خارجی (r_o)	۵۵/۶
شعاع ابتدایی جان (a)	۱۵
شعاع انتهایی جان (b)	۵۲/۵

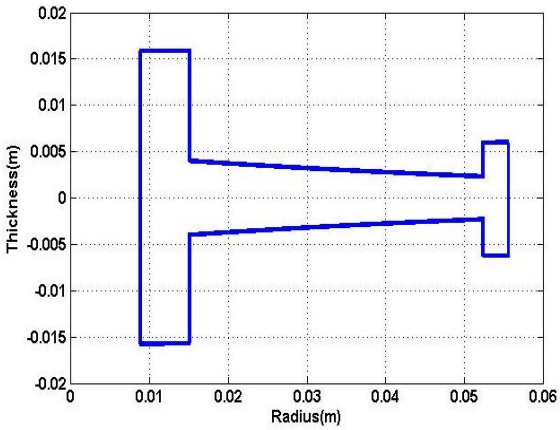
[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]



شکل ۴: توزیع ضخامت دیسک مورد بررسی

با توجه به شکل ۴ و رابطه (۳۰)، به منظور مدل‌سازی توزیع ضخامت نمایی، $n=0.77$ و $k=1$ انتخاب می‌شود؛ بنابراین با استفاده از دو دیسک ضخامت ثابت و یک دیسک با ضخامت نمایی، توزیع ضخامت به صورت شکل ۵ است.



شکل ۵: توزیع ضخامت با $n=0.77$ و $k=1$

نحوه توزیع T، E، α و ν در دیسک

توزیع دما از سوراخ تا تاج دیسک به صورت خطی و همانند رابطه (۳۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$T = A.r + B \qquad (۳۱)$$

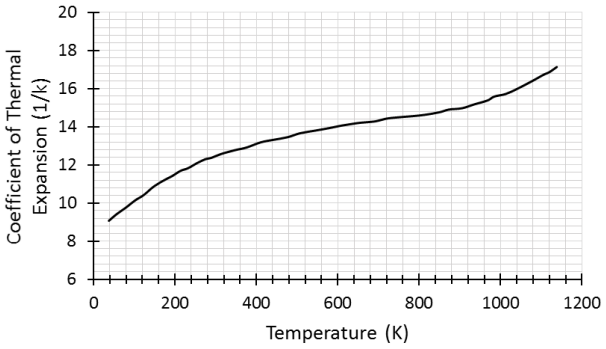
جایی که A و B با توجه به شرایط مرزی ارایه شده در (۳۲) مشخص می‌شوند:

$$T(r_i) = T_i \qquad T(r_o) = T_o \qquad (۳۲)$$

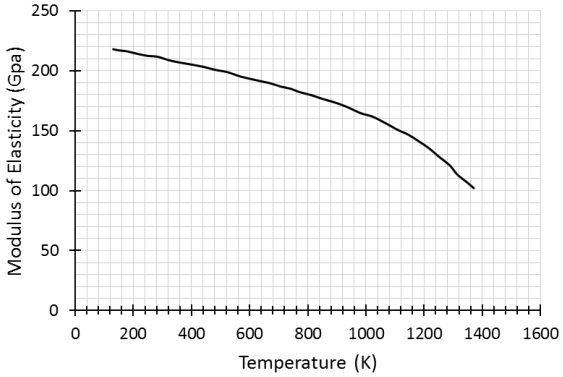
ماده مورد استفاده برای این دیسک، سوپرآلیاژ اینکونل ۷۱۸ است. خواص فیزیکی و مکانیکی متغیر با دمای این ماده از مرجع[۲۲] استخراج گردیده است. برای استفاده از منحنی‌های خواص، ابتدا لازم است که این منحنی‌ها به داده‌های عددی تبدیل شوند. برای انجام این کار از نرم‌افزار اینگیج دیجیتایزر[۵] استفاده شده‌است. برای این منظور داده‌ها به صورت قطعه به قطعه خطی در نظر گرفته شده‌اند. وظیفه درون‌یابی داده‌ها بر عهده یک زیربرنامه بنام اینترپولیت[۶] است که در هر نقطه از فضای طراحی مقادیر مشخصات مادی را محاسبه می‌کند. منحنی‌های تغییرات این خواص بر حسب دما در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند. شکل۶ منحنی تاثیر دما برضریب انبساط حرارتی سوپرآلیاژ اینکونل ۷۱۸ و شکل۷ منحنی تاثیر دما بر مدول الاستیک این ماده را نشان می‌دهند.

طبق تغییرات ارایه شده در شکل ۷ مقدار مدول الاستیسیته برابر ۱۵۳ Gpa و به طور متوسط در نظر گرفته شده است. از طرفی با توجه به تغییرات کم ضریب پواسون، این پارامتر به صورت یک مقدار ثابت و برابر ۰/۳ فرض می‌شود. [۱۴]

پارامترهای سرعت دورانی، چگالی ماده و دما در سوراخ و تاج دیسک نیز در جدول ۲ تعریف شده‌اند.



شکل ۶: تاثیر دما برضریب انبساط حرارتی سوپرآلیاژ اینکونل ۷۱۸



شکل ۷: تاثیر دما بر مدول الاستیک اینکونل ۷۱۸

جدول ۲: تعریف مشخصات دیسک

پارامتر	مقدار
سرعت دوران ($\omega(rpm)$)	۵۴۰۰۰
چگالی ($\rho(kg/m^3)$)	۸۲۲۱
دمای سوراخ دیسک ($T_i(k)$)	۷۰۰
دمای تاج دیسک ($T_o(k)$)	۹۷۰

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

شرایط مرزی دیسک مورد بررسی از جنس نیرو هستند و به همین دلیل شرایط مرزی تغییر مکان در رابطه (۲۷) مجهول در نظر گرفته شدند و پس از حل مساله به دست می‌آیند. نیروهای موجود درشعاع‌های داخلی و خارجی دیسک به صورت جدول ۳ ارایه می‌شوند.

جدول ۳: شرایط مرزی در شعاع‌های داخلی و خارجی

پارامتر (N)	مقدار
نیرو در شعاع داخلی	-۱۲۱۰
نیرو در شعاع خارجی	۳۵۱۰

با توجه به هندسه دیسک، می‌توان دو لبه ابتدایی و انتهایی را به عنوان دو دیسک ضخامت ثابت در نظر گرفت که دارای حل تحلیلی هستند. همچنین با یافتن معادله تغییر مکان قسمت میانی با استفاده از روش هموتوپی، سه معادله تغییر مکان وجود دارد. با برابر قراردادن تغییر مکان‌ها در نقاط تغییر هندسه از ضخامت ثابت به نمایی و بالعکس یا به عبارتی دیگر استفاده از روابط (۳۱):

$$u_A = u_B \qquad u_C = u_D \tag{۳۱}$$

و درنظرگرفتن فرضیات (۳۲) [۱۸] :

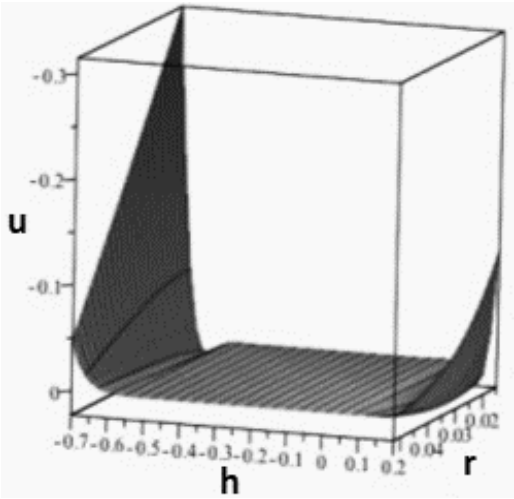
$$\sigma_{r,A} = \sigma_{r,B}(h_B / h_A) \qquad \sigma_{r,C} = \sigma_{r,D}(h_D / h_C) \tag{۳۲}$$

فرآیند حل مساله انجام می‌شود.

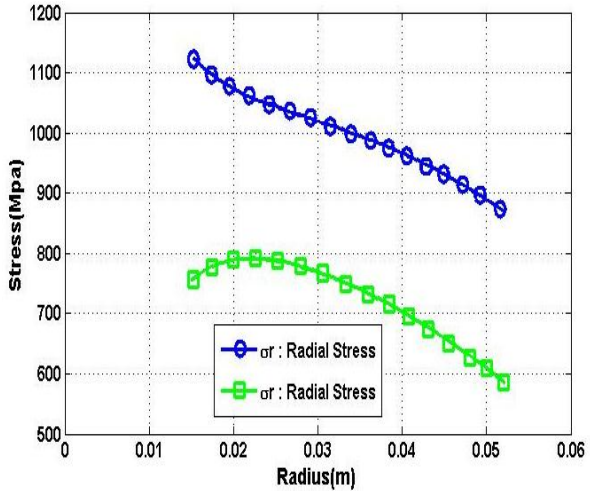
۵- نتایج حاصل از تحلیل دیسک به روش هموتوپی

با توجه به اهمیت انتخاب پارامتر h در روش هموتوپی، نمودار u بر حسب h و r، در شکل ۸ رسم شده است. با توجه به این شکل می‌توان پی برد که در بازه (۰/۶,۰/۱-) تغییرات u با h ناچیز است. بنابراین پارامتر h باید در این محدوده انتخاب شود. از آن‌جایی که با انتخاب پارامتر h، رابطه u حاصل باید در معادله (۶) صدق کند، برای مقادیر مختلفی از h در بازه (۰/۶,۰/۱-)، تغییرات باقی‌مانده بر حسب r مورد بررسی قرار گرفته است. بدیهی است که مقداری از h قابل قبول است که کم‌ترین باقی‌مانده را به دنبال داشته باشد. پس از بررسی، مقدار ۰/۳۱۳-= h در نظر گرفته می‌شود.

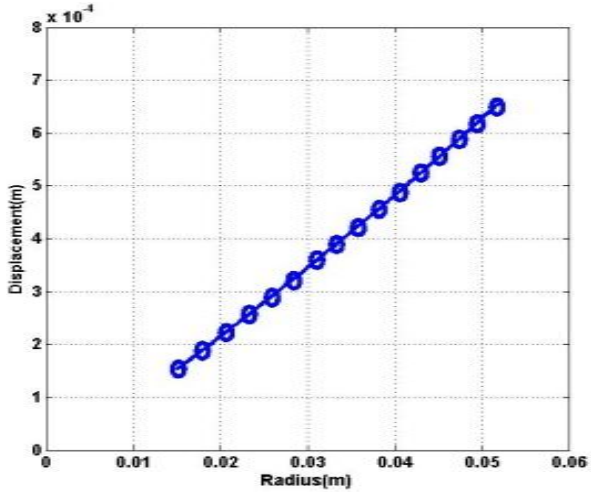
با در نظر گرفتن هندسه دیسک مورد بررسی شامل دو دیسک ضخامت ثابت و یک دیسک با تغییرات ضخامت نمایی، اعمال روش هموتوپی به همراه اثرات حاصل از تغییرات دما و اعمال شرایط مرزی، توزیع تنش و جابجایی در دیسک به دست می‌آید. شکل۹ منحنی‌های توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش هموتوپی را نشان می‌دهد. شکل۱۰ نیز منحنی تغییر مکان همین دیسک را به روش هموتوپی نشان می‌دهد.



شکل ۸: نمودار u بر حسب h و r



شکل ۹: منحنی‌های توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش هموتوپی



شکل ۱۰: منحنی تغییر مکان دیسک مورد بررسی به روش هموتوپی

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

در روش المان محدود دیسک دوار غیرهمگن با ضخامت متغیر به تعداد محدودی حلقه تجزیه می‌شود. هر حلقه تحت فشار داخلی، فشار خارجی، نیروی گریز از مرکز و تغییرات دما می‌باشد. برای چنین حلقه‌ای، از تغییرات ضخامت و خواص ماده صرف‌نظر می‌شود. در این روش که در مرجع [۲۳] توضیح داده شده است جابجایی شعاعی را برای مرز داخلی و خارجی دیسک به‌صورت رابطه۳۳ ارایه می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_i \\ \sigma_o \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (۳۳)$$

که در آن:

$$a_{11} = \frac{1+\nu}{E} \frac{-r_i^3}{r_o^2 - r_i^2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{r_o^2}{r_i^2} \right)$$
$$a_{12} = \frac{2}{E} \frac{r_i r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (۳۴)$$
$$a_{21} = -\frac{2}{E} \frac{r_i^2 r_o}{r_o^2 - r_i^2}$$
$$a_{22} = \frac{1+\nu}{E} \frac{r_o^3}{r_o^2 - r_i^2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{r_i^2}{r_o^2} \right)$$

$$b_1 = \frac{2r_i}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} \xi \alpha T d\xi \quad (۳۵)$$
$$b_2 = \frac{2r_o}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} \xi \alpha T d\xi$$

$$d_1 = \frac{\rho}{8E} \omega^2 r_i (2r_i^2 + 6r_o^2 - 2\nu r_i^2 + 2\nu r_o^2) \quad (۳۶)$$
$$d_2 = \frac{\rho}{8E} \omega^2 r_o (2r_o^2 + 6r_i^2 + 2\nu r_i^2 - 2\nu r_o^2)$$

برای آن‌که بتوان اثرات ضخامت را لحاظ کرد، تنش شعاعی و محیطی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_r = \frac{F_r}{h}, \quad \sigma_\theta = \frac{F_\theta}{h} \quad (۳۷)$$

که در آن F_r و F_θ به ترتیب نیروهای شعاعی و محیطی بر واحد طول بوده و h نیز ضخامت هر کدام از رینگ‌های مورد استفاده است. با جای‌گذاری رابطه۳۷ در رابطه۳۳می‌توان نوشت:

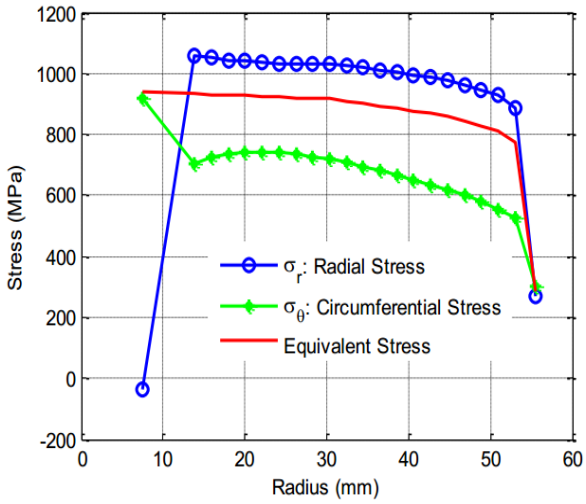
$$h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ri} \\ F_{ro} \end{Bmatrix} + h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} + h \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (۳۸)$$

پس از یافتن معادله۳۸ برای هریک از رینگ‌ها و اعمال شرط سازگاری جابجایی در مرزها، معادله کلی۱۹ بدست خواهد آمد، که یک دستگاه معادلات خطی می‌باشد:

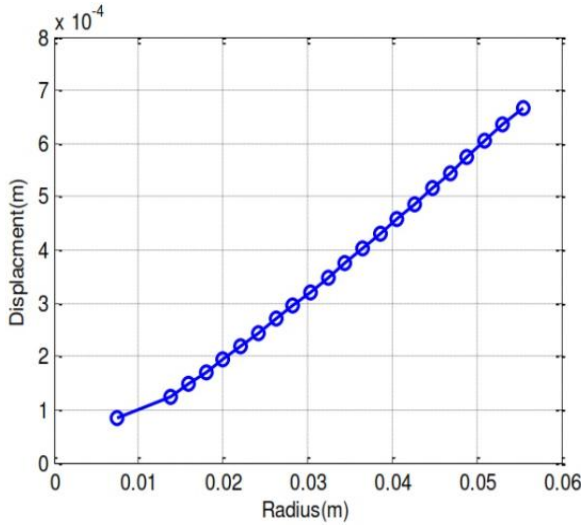
$$[K]U = F + [K]B + [K]D \quad (۳۹)$$

که در آن K، U، F، B و D فرم سرهم‌بندی شده پارامترهای موجود درمعادله۳۸ می‌باشند. معادله۳۹ برای یافتن بردار U حل می‌شود، سپس با استفاده از معادله۳۸ می‌توان مقدار نیرو به واحد طول را برای هریک از رینگ‌ها محاسبه نمود. با استفاده از نیروها، تنش‌های شعاعی و محیطی محاسبه می‌شوند.

نتایج حاصل از روش کد المان محدود [۲۳] در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ ارایه شده‌اند. شکل۱۱ منحنی‌های توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش کد المان محدود و شکل۱۲ نیز منحنی تغییر مکان همین دیسک را به روش کد المان محدود نشان می‌دهند. با مقایسه نتایج حاصل از روش هموتوپی با نتایج حاصل از روش کد المان محدود می‌توان پی برد که این دو روش دارای تطبیق قابل قبولی با یکدیگر هستند. در جدول ۴ مقادیر بیشینه تنش و تغییر مکان روش هموتوپی و روش کد المان محدود مقایسه شده‌اند؛ بررسی این جدول نیز نشان‌گر اختلاف کم بین نتایج حاصل از دو روش می‌باشد.



شکل ۱۱: منحنی‌های توزیع تنش دیسک مورد بررسی به روش کد المان محدود [۲۳]



شکل ۱۲: منحنی تغییر مکان دیسک مورد بررسی به روش کد المان محدود [۲۳]

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

جدول ۴: مقایسه مقادیر بیشینه تنش و تغییر مکان

نوع تحلیل	بیشینه σ_r (Mpa)	بیشینه σ_θ (Mpa)	بیشینه u (m)
روش کد المان محدود	۱۰۸۳	۷۵۵	۶/۳۶ × ۱۰$^{-۴}$
روش هموتوپی	۱۱۲۴	۷۸۶	۶/۳۵ × ۱۰$^{-۴}$
خطا (٪)	۳/۸	۴/۱	۰/۱

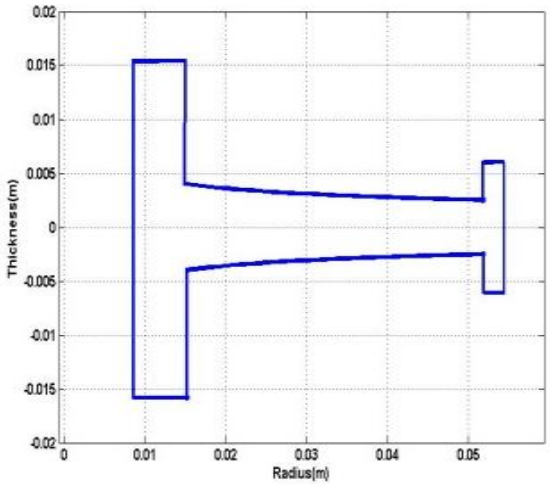
در این بخش جهت درک بیشتر از روند تغییرات پارامترها در دیسک ضخامت متغیر، به مقایسه نتایج دیسک حاضر با سایر دیسک‌ها پرداخته می‌شود. دیسک‌هایی که در این مرحله در نظر گرفته می‌شوند، دیسک هایپربولیک و ضخامت ثابت مطابق شکل ۱۳ و شکل ۱۴ هستند. شکل۱۳ توزیع ضخامت هایپربولیک و شکل۱۴ توزیع ضخامت ثابت دیسک را نشان می‌دهند. کلیه خواص و پارامترهای مربوط به دیسک همانند دیسک نمایی مورد تحلیل در نظر گرفته شده است. با توجه به این‌که توزیع ضخامت ثابت و هایپربولیک دارای حل تحلیلی هستند، حل ارایه شده یک حل دقیق است.

تابع تغییرات ضخامت در دیسک هایپربولیک به صورت رابطه (۴۰) ارایه می‌شود:

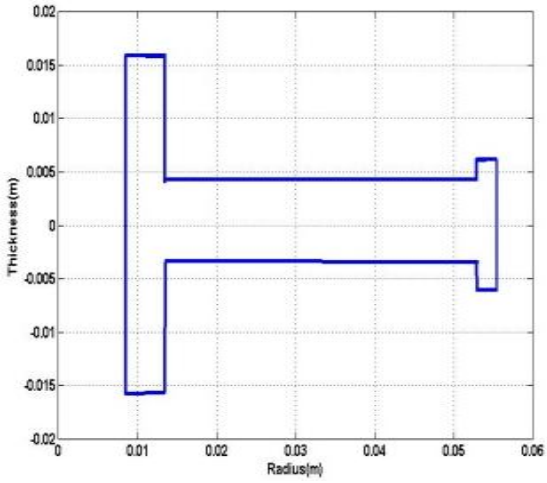
$$h = h_i(\rho)^a \qquad (۴۰)$$

جایی که $\rho = \frac{r}{r_e}$ شعاع بی بعد است و a با استفاده از $\frac{h_i}{h_e} = (\frac{r_e}{r_i})^{-a}$ ، مشخص می‌شود. h_e, r_i, r_e و h_i نیز به ترتیب شعاع‌های خارجی و داخلی و ضخامت در شعاع‌های خارجی و داخلی بخش هایپربولیک هستند.

پس از جای‌گذاری توزیع ضخامت در دو حالت ثابت و هایپربولیک در رابطه (۶) و در نظر گرفتن شرایط مرزی و تغییرات سایر پارامترها همانند بخش ۴-۲ و ۴-۳، حل دقیقی از معادله حاصل می‌شود.



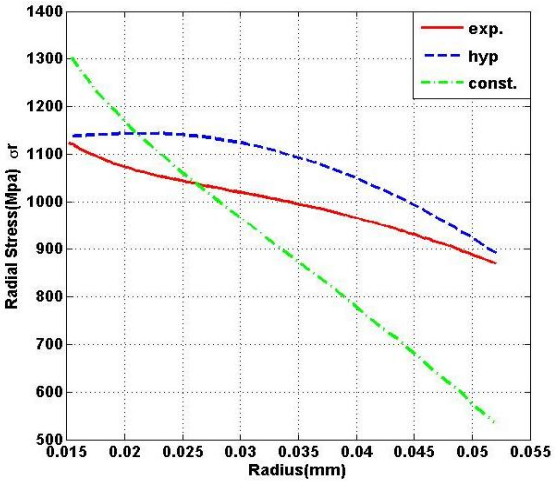
شکل ۱۳: توزیع ضخامت هایپربولیک



شکل ۱۴: توزیع ضخامت ثابت

شکل۱۵ مقایسه تنش شعاعی در توزیع‌های ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل را نشان می‌دهد. مقایسه تنش محیطی در توزیع‌های ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل نیز در شکل۱۶ نشان داده شده است. مقایسه تغییر مکان در توزیع‌های ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل در شکل۱۷ آمده است.

مطابق شکل۱۵ و شکل۱۶ روند تغییرات تنش شعاعی و محیطی در دو دیسک نمایی و هایپربولیک، به خصوص در مقادیر ابتدایی و انتهایی به هم نزدیک هستند. روند تغییرات تنش شعاعی در دیسک نمایی به صورت کاهشی است ولی در دیسک هایپربولیک با شیب کم‌تر و ملایم‌تر در قسمت انتهایی و با اختلاف کمی نسبت به دیسک نمایی کاهش می‌یابد. کاهش تغییرات تنش محیطی به گونه‌ای است که از شعاع ابتدایی دیسک، شروع به افزایش کرده و با گذر از نقطه‌ی اوج تا شعاع انتهایی دیسک کاهش می‌یابد. مقادیر تغییر مکان در هر سه دیسک مورد بررسی نیز دارای روندی نزدیک و قابل قبول هستند.

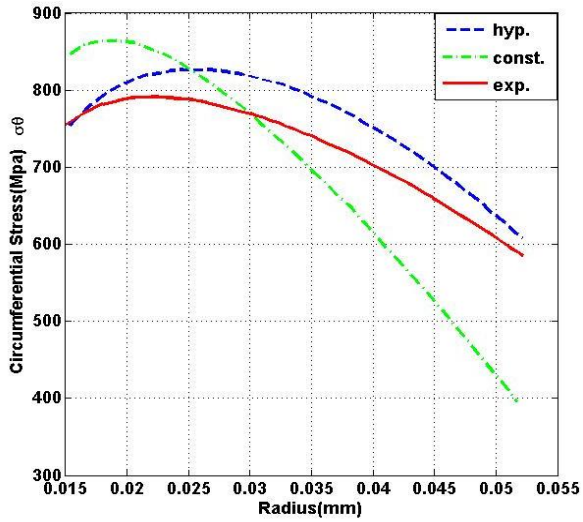


شکل ۱۵: مقایسه تنش شعاعی در توزیع‌های ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل

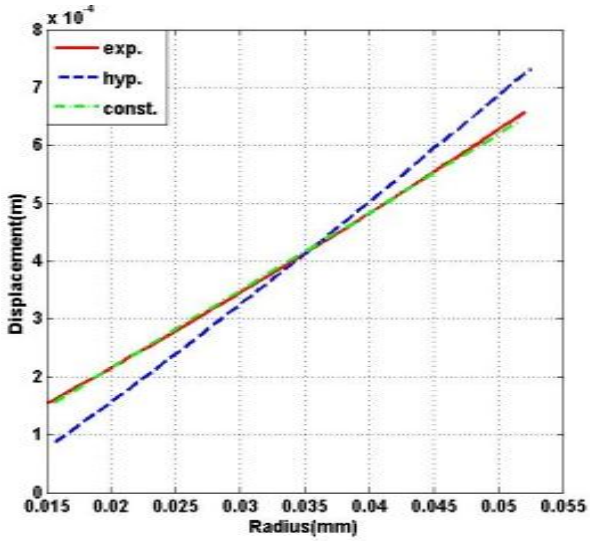
[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

مقادیر تنش‌های بیشینه و کمینه (شعاعی و محیطی) دیسک ضخامت ثابت نسبت به دیسک با توزیع هایپربولیک و در مقایسه با دیسک با توزیع نمایی، دارای اختلاف بیش‌تری هستند. این مورد همان‌گونه که با مقایسه توزیع ضخامت در شکل ۵، شکل ۱۳ وشکل ۱۴ مشاهده می‌شود، به دلیل اختلاف زیاد بین دو دیسک ضخامت ثابت و نمایی است. از طرفی در مقایسه مقادیر بیشینه می‌توان پی برد که دیسک ضخامت ثابت عاملی برای افزایش تنش‌ها است و استفاده از دیسک هایپربولیک یا نمایی بهتر از دیسک ضخامت ثابت است.



شکل ۱۶: مقایسه تنش محیطی در توزیع‌های ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل



شکل ۱۷: مقایسه تغییر مکان در توزیع‌های ضخامت مختلفی از دیسک مورد تحلیل

به دلیل نزدیک بودن هندسه دیسک هایپربولیک حاضر به دیسک نمایی، مقادیر حاصل از آنها با درصد خوبی به هم نزدیک هستند. بنابراین در صورتی که طراحی مفهومی مد نظر است و استفاده از دیسک هایپربولیک سبب اختلاف زیادی با هندسه دیسک مورد بررسی نمی‌شود، می‌توان به جای استفاده از روش هموتوپی و دیسک نمایی از حل دقیق و دیسک هایپربولیک استفاده کرد.

جدول ۵: مقایسه مقادیر بیشینه در توزیع‌های مختلفی از دیسک مورد تحلیل

توزیع ضخامت	تنش شعاعی بیشینه (Mpa)	تنش محیطی بیشینه (Mpa)	تغییر مکان بیشینه (m)
نمایی	۱۱۲۴	۷۸۶	$۶/۳۵ \times ۱۰^{-۴}$
ثابت	۱۳۰۵	۸۶۳	$۶/۳۰ \times ۱۰^{-۴}$
هایپربولیک	۱۱۵۲	۸۳۲	$۷/۳ \times ۱۰^{-۴}$
درصد تغییرات ثابت نسبت به نمایی (٪)	۱۶/۱	۹/۷	۰/۸
درصد تغییرات هایپربولیک نسبت به نمایی (٪)	۲/۵	۵/۸	۱۵

جدول ۵: مقایسه مقادیر کمینه در توزیع‌های مختلفی از دیسک مورد تحلیل

توزیع ضخامت	تنش شعاعی کمینه (Mpa)	تنش محیطی کمینه (Mpa)	تغییر مکان کمینه (m)
نمایی	۸۷۱	۵۸۵	$۱/۵ \times ۱۰^{-۴}$
ثابت	۵۳۰	۳۹۵	$۱/۴ \times ۱۰^{-۴}$
هایپربولیک	۸۹۰	۶۱۵	$۰/۸۵ \times ۱۰^{-۴}$
درصد تغییرات ثابت نسبت به نمایی (٪)	۳۹/۲	۳۲/۵	۶/۷
درصد تغییرات هایپربولیک نسبت به نمایی (٪)	۲/۲	۵/۱	۴۳/۳

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق روش تحلیل هموتوپی جهت بررسی نحوه توزیع تنش و تغییر مکان در دیسک دوار تحت بارگذاری حرارتی در موتور توربین گاز دریایی ارایه شد. روابط حاکم بر دیسک دوار تحت بارهای مکانیکی و گرادیان حرارتی، استخراج گردید و روش هموتوپی جهت حل معادلات حاکم پیاده‌سازی عددی شد. با توجه به اینکه حل دقیقی از رابطه توزیع ضخامت نمایی موجود نیست، استفاده از روش هموتوپی این امکان را فراهم می‌سازد تا در طراحی سازه دیسک تقریبی قابل قبول از نتایج حاصل شود. نتایج تحلیل تنش و تغییر مکان با استفاده از این روش با درصد خطای بسیار کم و در حدود ۴ درصد، انطباق قابل قبولی با روش المان محدود دارند. لذا این روش می‌تواند در زمان کمتر و صرف هزینه کمتر

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]

جهت تحلیل تنش و کرنش دیسک به کار گرفته شود. کارایی این روش به ویژه در مرحله طراحی مفهومی سازه دیسک که نیاز به صرف زمان و هزینه کمتر است دارای اهمیت ویژه‌ای است؛ هرچند می‌تواند در کنار روش المان محدود در مرحله طراحی تفصیلی سازه نیز به کار گرفته شود. نشان داده شد که می‌توان تغییرات ضخامت را همراه با دو ریم ابتدایی و انتهایی و همراه با تغییرات دما و پارامترهای متاثر از آن به طور هم‌زمان در نظر گرفت و تحلیل دیسک را با دقت مناسب انجام داد.

کلید واژگان

1- Homotopy
2- Hypergeometric
3- Functionally graded
4- Runge-kutta
5- Enguage Digitizer
6- Interpolate

۷- مراجع

1- Rangwala, A. S., (2005), *Turbo-Machinery Dynamics: Design and Operations*, McGraw Hill.

2- Woodyard, D., (2004), *Pounder's marine diesel engines and gas turbines*, 8th ed., Butterworth-Heinemann.

3- Walsh, P. P., Fletcher, P., (2004), *Gas Turbine Performance*, Second Edition, Blackwell.

4- Al-Ahmadi, S. A., (2011), *Numerical Comparison of Methods for Solving the BVP of Rotating Variable Thickness Disk*, Master Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science King Abdul Aziz University.

5- Timoshenko, S.P., (1956), *Strength of Materials, Part II*, third ed. D. Van Nostrand Co., Princeton (NJ).

6- Manson, S. S., (1947), *the determination of elastic stresses in gas-turbine disks, NACA. Report*. No. 871, p. 241–251.

7- Fenner, R.T., (1987), *Finite Element Methods for Engineers*, the Macmillan Press Ltd, London.

8- Apatay, T. and Eraslan, A. N., (2003), *Elastic deformations of rotating parabolic disks: an analytical solution, J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.*, Vol. 18, p. 115–135.

9- Eraslan, A. N., (2005), *Stress distributions in elastic–plastic rotating disks with elliptical thickness profiles using Tresca and von Misses criteria*, ZAMM. Vol. 85, p. 252–266.

10- Eraslan, A. N. and Orcan, Y., (2002), *Elastic–plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness*, Mechanic of Material, Vol. 34, p. 423–432.

11- Zenkour, A. M., (2006), *Thermoelastic solutions for annular disks with arbitrary variable thickness*, Structural Engineering Mechanic, Vol. 24, p.515-528.

12- Zenkour, A. M. and Allam, M. N. M., (2006), *On the rotating fiber-rein forced viscoelastic composite solid and annular disks of variable thickness*, International Journal of Computer Methodology Engineering Sciences, Vol. 7, p. 21-31.

13- Vincenzo Vullo, Francesco Vivio, (2008), *Elastic stress analysis of non-linear variable thickness rotating disks subjected to thermal load and having variable density along the radius*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, p. 5337–5355.

14- Vullo, V., Vivio, F., (2013), *Rotors: Stress Analysisand Design*, McGraw Hill.

15- Hojjati, M.H., Jafari, S., (2008), *Semi-exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian's decomposition methods. Part I: Elastic solution*, International Journal of Pressure Vessels and Piping Vol. 9, p. 871–878.

16- Nie, G.J., Batra, R.C., (2010), *Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness*, Composite Structures, Vol. 11, p. 92 720–729.

17- Bayat, M., et al., (2009), *Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads*, International Journal of Pressure Vessels and Piping Vol. 86, p. 357–372.

18- Zenkour, A. M., Mashat, D. S., (2010), *Analytical and Numerical Solutions for a Rotating Annular Disk of Variable Thickness*, Applied Mathematics, Vol. 21, p. 431-438.

19- Hassani, A., et al, (2012), *Thermo-mechanical analysis of rotating disks with non-uniform thickness and material properties*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.9, p. 95-101.

20- Liao, S., (2004), *Beyond perturbation introduction to the homotopy analysis method*, A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C.

21- Sedighi, H. M., Shirazi, K. H., (2011), *Using homotopy analysis method to determine profile for disk cam by means of optimization of dissipated energy*, International Review of Mechanical Engineering, Vol. 5, p. 55-61.

22- Eraslan, A. N., (2011), *Metallic materials properties development and standardization (MMPDS-06)*, Federal Aviation Administration.

23- Shahriari, B., et al, (2014), *Optimization of the Second Stage Disk's Structure for the Turbine of J85-21-GE Aero Gas Turbine Engine*, Journal of aerospace propulsion, Vol.1, p. 106-115.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-02-07]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1396.13.26.2.0]