

طراحی کنترلگر تعقیب مسیر هماهنگ برای گروه شناور زیرسطحی با در نظر گرفتن مسئله اجتناب از برخورد

حسن صیادی^{۱*}، ایمان قاسمی^۲

^۱ استاد، قطب علمی هیدرودینامیک و دینامیک متحرک‌های دریایی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف؛ sayyaadi@sharif.edu

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف؛ i.gh1200@yahoo.com

اطلاعات مقاله

چکیده

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۰/۲۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۹/۰۷

کلمات کلیدی:

شناور زیرسطحی

تعقیب مسیر هماهنگ

تئوری گراف

اجتناب از برخورد با مانع

سیکل حد

در این مقاله مسئله حرکت هماهنگ یک گروه زیرسطحی با در نظر گرفتن مسئله اجتناب از برخورد زیرسطحی‌ها با موانع و همچنین با یکدیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور در ابتدا با استفاده از روش گام به عقب، برای یک زیرسطحی کنترلگر تعقیب مسیر طراحی می‌گردد. اثبات پایداری کنترلگر ارائه شده با استفاده از قاعده لیاپانوف انجام می‌گیرد. در ادامه با استفاده از قواعد تئوری گراف، مدل‌سازی ارتباط بین زیرسطحی‌ها انجام شده و کنترلگر تعقیب مسیر برای یک زیرسطحی به کنترلگر تعقیب مسیر به صورت هماهنگ برای گروه زیرسطحی تعمیم داده می‌شود. سپس مسئله اجتناب از برخورد بررسی می‌شود. بدین منظور با استفاده از روش سیکل حد پیرامون هر مانع یک بیضی در نظر گرفته شده و در صورت خطر برخورد یکی از عوامل با موانع، کنترلگر اجتناب از برخورد فعال می‌شود. همچنین این روش برای مسئله اجتناب از برخورد عوامل با همدیگر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نهایت نیز با استفاده از ضرایب هیدرودینامیکی یک زیرسطحی شبیه‌سازی انجام شده و نتایج به منظور عملکرد صحیح کنترلگر طراحی شده، ارائه می‌شود.

Design of Coordinated Path Following Controller for Multiple Autonomous Underwater Vehicle Considering Obstacles and Collision Avoidance

Hassan Sayyaadi^{1*}, Iman Ghasemi²

¹ Professor, Center of Excellence in Hydrodynamics & Dynamics of Marine Vehicles, School of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran 11155-9567 Iran; sayyaadi@sharif.edu

² M.Sc. Student of Mechatronics Engineering, School of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology; i.gh1200@yahoo.com

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 11 Jan. 2016

Accepted: 27 Nov. 2016

Keywords:

Autonomous underwater vehicle

Coordinated path following

Graph theory

Obstacle and collision avoidance

Limit cycle

ABSTRACT

In this paper the problem of coordinated path following for a group of Autonomous underwater vehicle (AUV) subjected to obstacle and collision avoidance is considered. At first a back stepping controller is used for an AUV to design a path following controller and its stability is examined via Lyapunov criteria. Then using of graph theory, modeling of interconnection between AUV systems is addressed and by this modeling the coordinated path following controller for multiple AUV is designed. After all the problem of obstacles and collision avoidance is considered appropriately. For this purpose, each obstacle involving a limit cycle of an ellipse and if the collision or conflict of one AUV to the surrounded environmental obstacles will be detected, the obstacle avoidance algorithm is activated to prevent collision. Also the same algorithm for collision avoidance in between all AUV systems in the group is implemented. Finally the depicted results illustrate the effectiveness and performances of the proposed controller apparently for a sample AUV, which its hydrodynamics coefficients are available in references.

در سالهای اخیر کنترل گروهی چندین ربات به دلیل کاربردهای گسترده‌ی آن از جمله عملیات جست‌وجو، داده برداری از محیط، حمل بارهای سنگین و کنترل آرایش مورد توجه محققین قرار گرفته است. یک گروه از ربات‌های مورد استفاده، شناورهای سطحی و زیرسطحی هستند که کاربردهایی از جمله جمع آوری داده و نقشه‌برداری و همچنین بازرسی خطوط انتقال نفت و گاز کف دریا به صورت گروهی را دارند [۱، ۲]. استفاده گروهی از زیرسطحی‌ها باعث افزایش ناحیه کاری شده و در صورت خراب شدن یکی از زیرسطحی‌ها عملیات بی‌نتیجه نمی‌ماند [۳، ۴].

در این بین برای کنترل گروه ربات دو مساله مهم وجود دارد:

۱- نحوه کنترل گروه ربات

۲- حل مساله اجتناب از برخورد عوامل با یکدیگر و با موانع

روش‌های متفاوتی برای کنترل گروه ربات ارائه شده است که می‌توان به روش رفتاری [۵]، روش ساختار مجازی [۶، ۷]، روش رهبر-پیرو [۴]، روش توابع پتانسیل مصنوعی [۸-۱۰] و روش مبتنی بر اساس تئوری گراف [۱۱-۱۳] اشاره کرد. در این بین با توجه به اینکه در روش تئوری گراف می‌توان ارتباط بین عوامل را مدل‌سازی کرد و در زیرآب همواره مشکلاتی در رابطه با ارتباط بین عوامل وجود دارد، بنابراین این روش نسبت به سایر روش‌ها برای گروه زیرسطحی مناسب‌تر است [۱۲].

به دلیل اینکه دینامیک زیرسطحی‌ها تحریک غیرکامل^۱ بوده و همچنین نیروها و ممان‌های محیطی روی دینامیک شناور اثرگذار هستند و در ضمن ترمهای غیرقطری در ماتریس جرم و میرایی هیدرودینامیکی وجود دارند، مسئله کنترل آرایش برای زیرسطحی‌ها نسبت به رباتهای دیگر سخت‌تر است [۴، ۱۲]. در این زمینه در سال ۲۰۰۸ آقای دانگ و همکار مساله کنترل آرایش را برای یک گروه شناور با هدف رسیدن به آرایش ایستا دلخواه مورد بررسی قرار دادند [۱۴]. ایشان مدل ساده‌ای از شناور را در نظر گرفتند به نحوی که از مدل‌سازی نیروها و ممان‌های محیطی دریا و اقیانوسها و همچنین از ترمهای مرتبه دوم ماتریس جرم و ماتریس میرایی هیدرودینامیک صرف نظر کردند و با توجه به آن کنترلگری بر اساس تئوری گراف و قاعده لیاپانوف طراحی کردند. ایشان همچنین مساله اجتناب از برخورد را برای گروه شناور زیرسطحی مورد بررسی قرار دادند که از این منظور کار ایشان دچار اشکال است. در سال ۲۰۰۸ نیز آقای قوام و همکار مساله کنترل آرایش را با استفاده از روش تئوری گراف برای گروه شناور زیرسطحی مورد بررسی قرار دادند [۱۵]. ایشان مدل ساده‌ای از شناور را در نظر گرفته و با استفاده از کنترلگر فازی این مساله را حل نمودند. در ضمن ایشان نیز مساله اجتناب از برخورد را برای گروه شناور مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۱۰ آقای دانگ مساله کنترل آرایش

را برای گروه شناور سطحی به منظور رسیدن به آرایش دلخواه با استفاده از یک ربات مجازی به عنوان رهبر با استفاده از روش تئوری گراف مورد بررسی قرار دادند [۳]. در ادامه نیز در سال ۲۰۱۲ آقای وانگ و همکاران [۱۱]، در سال ۲۰۱۳ آقای پنگ و همکاران [۱۶]، در سال ۲۰۱۴ آقای قوام و همکار [۱۲] و در سال ۲۰۱۵ آقای پارک [۱] مساله کنترل آرایش را با استفاده از روشهای تئوری گراف و برای شرایط متفاوت در رابطه با انتقال اطلاعات مورد بررسی قرار دادند. وجه مشترک تمام مقالات عدم استفاده از دینامیک کامل شناور و همچنین عدم بررسی مساله اجتناب از برخورد است.

امروزه پژوهشگران روش‌های متنوعی را در رابطه با بحث اجتناب از برخورد پیشنهاد داده‌اند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش تابع پتانسیل [۱۷]، روش نمونه برداری [۱۸]، روش‌های اکتشافی [۱۹] و روش سیکل حد [۲۰] اشاره کرد. در این بین در سالهای اخیر روش سیکل حد به دلیل سادگی در پیاده‌سازی و عملکرد خوب آن مورد توجه محققین قرار گرفته است [۲۱]. این روش در رابطه با مساله اجتناب از برخورد برای گروه شناور زیرسطحی استفاده نشده است. در این روش موانع با استفاده از سیکل حد شبیه‌سازی شده و از برخورد رباتها با موانع جلوگیری می‌شود. این روش توسط کیم و همکاران ارائه شد [۲۲]. سپس روش ارائه شده توسط سلطان و همکاران [۲۳] و همچنین قاسمی و همکاران [۲۴] گسترش داده شد.

با توجه به مرور مقالات هدف اصلی از انجام این تحقیق به شرح زیر است:

۱. حل مسئله کنترل آرایش برای یک گروه زیرسطحی با استفاده از روش تئوری گراف و گام به عقب^۲
۲. در نظر گرفتن ترمهای مرتبه دوم ماتریس جرم و میرایی هیدرودینامیکی و همچنین نیروها و ممانهای محیطی در مدل‌سازی
۳. در نظر گرفتن مسئله اجتناب از برخورد عوامل با یکدیگر و همچنین عوامل با موانع محیطی

ویژگی این مقاله نسبت به سایر مقالات در نظر گرفتن مساله اجتناب از برخورد بین عوامل و موانع موجود در محیط است. روش به کار گرفته شده برای مساله اجتناب از برخورد نیز، روش سیکل حد است که از این روش برای مساله اجتناب از برخورد در رابطه با گروه شناور زیرسطحی استفاده نشده است. مزیت دیگر این مقاله در نظر گرفتن دینامیک کامل یک زیرسطحی برای مدل‌سازی و طراحی کنترلگر است.

در ادامه ابتدا مفاهیم پایه ارائه می‌شود. سپس کنترلگر تعقیب مسیر برای یک زیرسطحی ارائه می‌شود. سپس این کنترلگر برای گروه شناور زیرسطحی تعمیم داده می‌شود. بعد از ارائه کنترلگر

نسبت به مختصات بدنه معادلات سینماتیک برای زیرسطحی نمونه i ام به صورت زیر استخراج می‌گردد [۲۵]:

$$\dot{\eta}_i = J(\eta_i) v_i \quad (1)$$

$$J(\eta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_i) & -\sin(\psi_i) & 0 \\ \sin(\psi_i) & \cos(\psi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جدول ۱- نماد گذاری‌های استفاده شده برای حرکت زیرسطحی در صفحه‌ی افقی [۲۵]

مکان‌ها و زوایای اوپلری	سرعت‌های خطی و دورانی	نیروها و ممانها	توضیح	درجه آزادی
x	u	XX	حرکت در جهت X (surge)	۱
y	v	YY	حرکت در جهت Y (sway)	۲
ψ	r	NN	دوران حول محور z (yaw)	۳

برای استخراج معادلات دینامیک زیرسطحی فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود.

- از در نظر گرفتن حرکت در جهت z ، حرکت حول محور x و حرکت حول محور y چشم‌پوشی می‌شود.
- زیرسطحی همگن فرض شده و همچنین توزیع جرم در صفحه‌ی xz متقارن است.
- مرکز جرم و مرکز شناوری روی محور z قرار دارند.
- مرکز مختصات متصل به بدنه روی مرکز جرم بوده و همچنین محورهای مختصات متصل به بدنه منطبق بر محورهای اصلی زیرسطحی است. با این فرضیات معادلات دینامیک زیرسطحی i ام به صورت زیر استخراج می‌گردد [۲۵، ۲۷]:

$$M_i \dot{v}_i + C_i(v_i)v_i + D_i(v_i)v_i = \tau_{Ei} + \tau_i \quad (2)$$

به نحوی که:

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D_i(v) = \begin{bmatrix} d_{11i} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22i} & d_{23i} \\ 0 & d_{32i} & d_{33i} \end{bmatrix}$$

$$\tau_i = \begin{bmatrix} \tau_{ui} \\ 0 \\ \tau_{ri} \end{bmatrix}, \tau_{Ei} = J^T(\eta_i) \begin{bmatrix} b_{ui} \\ b_{vi} \\ b_{ri} \end{bmatrix}$$

$$C_i(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{22}v_i - m_{23}r_i \\ 0 & 0 & m_{11}u_i \\ +m_{22}v_i + m_{23}r_i & -m_{11}u_i & 0 \end{bmatrix}$$

برای گروه شناور زیرسطحی، روش اجتناب از برخورد عوامل با یکدیگر و همچنین با موانع ارائه می‌شود. در نهایت نیز نتایج به منظور عملکرد درست کنترلگر ارائه می‌شود.

۲ - مفاهیم پایه در مدلسازی هیدرودینامیکی و ارتباط زیرسطحی‌ها

در این قسمت مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز برای طراحی کنترلگر ارائه می‌شود. این مفاهیم شامل مدل‌سازی زیرسطحی و همچنین مفاهیم مورد نیاز تئوری گراف است.

۲-۱- مدل‌سازی زیرسطحی سه درجه آزادی در صفحه افقی

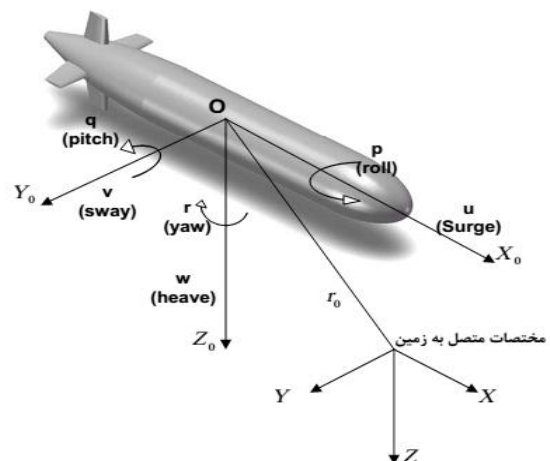
در این قسمت معادلات سینماتیک و دینامیک یک زیرسطحی در صفحه‌ی افقی استخراج می‌گردد. برای بدست آوردن معادلات حرکت همانند شکل ۱ از دو دستگاه مختصات استفاده می‌شود. دستگاه مختصات متحرک، $X_0Y_0Z_0$ که به مرکز ثقل وسیله متصل است که دستگاه مرجع متصل به بدنه نامیده می‌شود. مبدأ دستگاه مختصات متصل به بدنه، معمولاً در مرکز جرم وسیله انتخاب می‌شود. در زیرسطحی، محورهای $X_0Y_0Z_0$ منطبق با محورهای اصلی اینرسی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]:

X_0 : محور طولی (جهت از پاشنه به سمت دماغه)

Y_0 : محور عرضی (جهت به سمت استاربور)

Z_0 : محور عمودی (جهت از بالا به پایین)

دستگاه مختصات دیگر، دستگاه متصل به زمین، XYZ است که به عنوان دستگاه مختصات اینرسی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- دستگاه‌های مختصات متصل به بدنه و زمین [۲۶]

همچنین مولفه‌های حرکت مطابق با جدول ۱ است. بنابراین با توجه به حرکت زیرسطحی در صفحه افقی تعداد درجات آزادی برابر ۳ است. با در نظر گرفتن $\eta = [x, y, \psi]^T$ برای بردار جابه جایی نسبت به مختصات زمین و $v = [u, v, r]^T$ برای بردار سرعت

که در روابط بالا متغیرها به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m - X_u, m_{22} = m - Y_v \\ m_{23} &= m x_g - Y_r, m_{33} = I_z - N_r \\ d_{11i} &= -(X_u + X_{|u|u} |u_i|) \\ d_{22i} &= -(Y_v + Y_{|v|v} |v_i| + Y_{|r|v} |r_i|) \\ d_{23i} &= -(Y_r + Y_{|v|r} |v_i| + Y_{|r|r} |r_i|) \\ d_{32i} &= -(N_v + N_{|v|v} |v_i| + N_{|r|v} |r_i|) \\ d_{33i} &= -(N_r + N_{|v|r} |v_i| + N_{|r|r} |r_i|) \end{aligned} \quad (4)$$

- ماتریس مجاورت: ماتریس $A = [a_{ij}]$ را گویند که $a_{ii} = 0$ و $a_{ij} > 0$ اگر $(v_j, v_i) \in E$ ، در غیر اینصورت $a_{ij} = 0$ ، $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$.
- ماتریس درجه (ورودی): ماتریس $D = \text{diag} \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ را که در آن $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ، ماتریس درجه گویند.
- ماتریس لاپلاسیان: ماتریس $L = D - A$ را ماتریس لاپلاسیان گویند. با توجه به تعاریف ماتریس مجاورت و درجه، مجموع مولفه‌های هر سطر از ماتریس لاپلاسیان صفر خواهد بود.

۳- طراحی کنترلر تعقیب مسیر برای یک زیرسطحی

در این قسمت طراحی کنترلر برای یک زیرسطحی به منظور تعقیب مسیر طراحی می‌گردد. بدین منظور کنترلگری برای زیرسطحی i ام طراحی میشود که مسیر مرجع (s_i) را تعقیب کند [۲۹، ۳۰]. در نهایت کنترلر طراحی شده باید بتواند به هدف زیر دست یابد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta_i(t) - \eta_{di}(s_i(t))\| = \delta_i \quad |\delta_i| < 0.5\pi \quad (5)$$

۳-۱- تبدیل مختصات برای یک زیرسطحی

به دلیل جلوگیری از اثرگذاری ورودی کنترل τ_{ri} که به دلیل وجود ترمهای غیرقطری ماتریس جرم روی دینامیک در راستای y اثر می‌گذارد، در این قسمت تبدیل مختصات زیر انجام می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i + \varepsilon_i \cos(\psi_i) \\ \bar{y}_i &= y_i + \varepsilon_i \sin(\psi_i) \\ \bar{v}_i &= v_i + \varepsilon_i r_i \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه بالا $\varepsilon_i = \frac{m_{23}}{m_{22}}$ است. با استفاده از تغییر مختصات بالا، معادلات دینامیک زیرسطحی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &= u_i \cos(\psi_i) - \bar{v}_i \sin(\psi_i) \\ \dot{\bar{y}}_i &= u_i \sin(\psi_i) + \bar{v}_i \cos(\psi_i) \\ \dot{\psi}_i &= r_i \\ \dot{u}_i &= \varphi_{ui} + \frac{1}{m_{11}} \tau_{ui} + \frac{1}{m_{11}} (b_{ui} \cos(\psi_i) + b_{vi} \sin(\psi_i)) \\ \dot{\bar{v}}_i &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} v_i - \frac{d_{22i}}{m_{22}} u_i r_i + c_i r_i \\ &\quad + \frac{1}{m_{22}} (-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{r}_i = \varphi_{ri} + \frac{m_{22}}{f} \tau_{ri} + \frac{m_{23}}{f} (b_{ui} \sin(\psi_i) - b_{vi} \cos(\psi_i)) + \frac{m_{22}}{f} b_{ri}$$

پارامترهای استفاده شده در روابط بالا در جدول ۲ به همراه مقادیر مورد استفاده در شبیه‌سازیها در ادامه توضیح داده شده‌اند. لازم به ذکر است که τ_{ui} نمایانگر ورودی کنترلی نیرو در راستای x بوده که ناشی از حرکت پروانه‌ی انتهایی زیرسطحی است. τ_{ri} نیز ورودی کنترلی گشتاور در راستای z بوده که ناشی از حرکت باله‌های زیرسطحی است. از این رو با توجه به اینکه تعداد ورودی‌های کنترل زیرسطحی برابر ۲ بوده و تعداد درجات آزادی برابر ۳ است، زیرسطحی یک مسئله کنترلی تحریک غیرکامل است. همچنین بردار نمایش دهنده‌ی نیروها و ممان‌های محیطی و اغتشاشات وارده بر زیرسطحی در مختصات متصل به زمین است.

۲-۲- مدل‌سازی ارتباط بین زیرسطحی‌ها

در این مقاله هر زیرسطحی تمام متغیرهای مورد نیاز برای کنترل، از جمله سرعت و موقعیت خود و دیگر زیرسطحی‌ها را توسط سیستم حسگرها در اختیار دارد. همچنین هر زیرسطحی توسط رئوس گراف مدل‌سازی شده و در ضمن ارتباط زیرسطحی‌ها با یکدیگر توسط گراف بدون جهت G نمایش داده می‌شود. بدین منظور مفاهیم پایه‌ای و مورد نیاز تئوری گراف در زیر ارائه می‌شود [۲۸، ۱۴]:

یک گراف G یک جفت منظمی از $(V(G), E(G))$ شامل یک مجموعه $V(G)$ از رئوس (گره‌ها) و یک مجموعه $E(G)$ از لبه‌ها است که $E \subseteq V \times V$ و $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، در یک گراف v_i ، i امین عامل را نشان می‌دهد و یک لبه، یک جفت از گره‌های مجزای متصل شده است که با $(v_i, v_j) \in E$ نشان داده می‌شود. گراف‌ها بر دو نوع هستند: گراف جهتدار و گراف بدون جهت. در گراف جهتدار، لبه (کمان) $(v_i, v_j) \in E$ به معنای ارسال اطلاعات از v_i به v_j است. در حالی که در یک گراف بدون جهت لبه $(v_i, v_j) \in E$ به معنای ارسال اطلاعات از هر دو گره به یکدیگر است. در زیر بعضی از تعاریف مربوط به یک گراف ارائه می‌شود.

- مرتبه و اندازه یک گراف: تعداد رئوس یک گراف را مرتبه و تعداد لبه‌های آن را اندازه گراف گویند.

که در آن:

معادلات کلی زیرسطحی i ام را تشکیل می‌دهند که به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ei} &= u_i - u_{di} \cos(\psi_{ei}) + r_i y_{ei} \\ \dot{y}_{ei} &= v_i + u_{di} \sin(\psi_{ei}) - r_i x_{ei} \\ \dot{\psi}_{ei} &= r_i - r_{di} \\ \dot{u}_i &= \varphi_{ui} + \frac{1}{m_{11}} \tau_{ui} + \frac{1}{m_{11}} (b_{ui} \cos(\psi_i) + b_{vi} \sin(\psi_i)) \\ \dot{v}_i &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} v_i - \frac{d_{22i}}{m_{22}} u_i r_i + c_i r_i \\ &\quad + \frac{1}{m_{22}} (-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) \\ \dot{r}_i &= \varphi_{ri} + \frac{m_{22}}{f} \tau_{ri} + \frac{m_{23}}{f} (b_{ui} \sin(\psi_i) - b_{vi} \cos(\psi_i)) \\ &\quad + \frac{m_{22}}{f} b_{ri} \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین برای طراحی کنترلگر، معادلات تعقیب مسیر زیرسطحی i ام به مسئله طراحی یک کنترلگر رگولاتور برای سه معادله‌ی اول رابطه (۱۳) در نقطه‌ی $(0,0)$ تبدیل می‌شود. بنابراین ورودی‌های کنترلی τ_{ri}, τ_{ui} با این هدف باید استخراج شوند.

۳-۳- طراحی کنترلگر برای یک زیرسطحی

ساختار رابطه‌ی (۱۳) دارای فرم مثلثی شکل است که برای پایداری آن می‌توان از روش گام به عقب پیشرفته استفاده کرد [۲۹]. لازم به ذکر است که می‌توان پایداری x_{ei} را به وسیله u_i انجام داد ولی برای y_{ei} ، نمی‌توان v_i را با استفاده از ترم $u_{di} \sin(\beta_{\psi_{ei}})$ بدون محدودیت در شرایط اولیه حذف کرد [۲۹]. بنابراین یک روش پایداری y_{ei} ، می‌توان از مشتق مسیر به عنوان یک پارامتر کنترلی اضافی استفاده کرد. علاوه بر این، مشتق مسیر نیز به عنوان هماهنگ کننده‌ی حرکت زیرسطحی‌ها در کنترل آرایش استفاده می‌شود. بدین منظور با توجه به پارامتر مشتق مسیر و وظایف ذکر شده برای آن، متغیر زیر تعریف می‌شود:

$$w_i = \mathcal{G}_i(s_i, t) - \dot{s}_i \quad (14)$$

که $\mathcal{G}_i(s_i, t)$ تنظیم کننده سرعت برای هر زیرسطحی در روی مسیر است. برای طراحی کنترلگر، متغیرهای زیر تعریف می‌شوند:

$$u_{ei} = u_i - \beta_{ui}, \bar{\psi}_{ei} = \psi_{ei} - \beta_{\psi_{ei}}, r_{ei} = r_i - \beta_{ri} \quad (15)$$

که $\beta_{ui}, \beta_{\psi_{ei}}, \beta_{ri}$ ورودی‌های کنترلی مجازی بوده که در ادامه طراحی می‌شوند. فرآیند طراحی کنترلگر از چهار مرحله تشکیل شده است.

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{d_{22i} m_{23} - d_{23i} m_{22}}{m_{22}^2} \\ f &= m_{22} m_{33} - m_{23}^2 \\ \varphi_{ui} &= \frac{m_{22}}{m_{11}} v_i r_i + \frac{m_{23}}{m_{11}} r_i^2 - \frac{d_{11i}}{m_{11}} u_i \\ \varphi_{ri} &= \frac{m_{11} m_{22} - m_{22}^2}{f} u_i v_i + \frac{m_{11} m_{23} - m_{23} m_{22}}{f} u_i r_i \\ &\quad - \frac{m_{22}}{f} (d_{33i} r_i + d_{32i} v_i) + \frac{m_{23}}{f} (d_{23i} r_i + d_{22i} v_i) \end{aligned} \quad (8)$$

هستند. با توجه به معادلات بالا مشخص است که ورودی کنترلی τ_{ri} دیگر روی دینامیک v_i اثرگذار نیست.

۳-۲- معادلات خطای تعقیب مسیر

به منظور طراحی کنترلگر، معادلات خطای تعقیب مسیر، در مختصات متصل به مسیر $\xi_i(s_i)$ استخراج می‌گردد. معادلات خطا به شرح زیر است:

$$\begin{bmatrix} x_{ei} \\ y_{ei} \\ \psi_{ei} \end{bmatrix} = J^T(\psi_i) \begin{bmatrix} \bar{x}_i - x_{di} \\ \bar{y}_i - y_{di} \\ \bar{\psi}_i - \psi_{di} \end{bmatrix} \quad (9)$$

که ψ_{di} زاویه‌ی بین مسیر و محور X_E است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_{di} = \arctan\left(\frac{y'_{di}}{x'_{di}}\right) \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، $x'_{di} = \frac{\partial x_{di}}{\partial s_i}$ ، $y'_{di} = \frac{\partial y_{di}}{\partial s_i}$ ، از دو طرف رابطه‌ی (۹) در امتداد سه معادله اول رابطه (۷) مشتق گیری شده و معادلات خطای سینماتیک به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ei} &= u_i - u_{di} \cos(\psi_{ei}) + r_i y_{ei} \\ \dot{y}_{ei} &= v_i + u_{di} \sin(\psi_{ei}) - r_i x_{ei} \\ \dot{\psi}_{ei} &= r_i - r_{di} \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} u_{di} &= \sqrt{x_{di}'^2(s_i) + y_{di}'^2(s_i)} \dot{s}_i := \bar{u}_{di} \dot{s}_i \\ r_{di} &= \frac{x_{di}'(s_i) y_{di}''(s_i) - y_{di}'(s_i) x_{di}''(s_i)}{x_{di}'^2(s_i) + y_{di}'^2(s_i)} \dot{s}_i \\ &:= \bar{r}_{di} \dot{s}_i \end{aligned} \quad (12)$$

در روابط بالا $x_{di}'' = \frac{\partial^2 x_{di}}{\partial s_i^2}$ ، $y_{di}'' = \frac{\partial^2 y_{di}}{\partial s_i^2}$ هستند. معادلات خطای سینماتیک بدست آمده با ۳ معادله دینامیک رابطه (۷)،

$$\dot{y}_{ei} = \frac{-k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} - r_i x_{ei} + \Phi_{2i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) + \kappa_{2i} w_i \quad (23)$$

* مرحله ۳: در این مرحله $\bar{\psi}_{ei}$ پایدار می‌شود. بدین منظور از دو طرف معادله‌ی دوم رابطه (۱۵) با توجه به روابط (۲۰) و (۱۸) مشتق‌گیری می‌شود و در نتیجه معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_{ei} = & r_i - r_{di} - \frac{\dot{u}_{d_{oi}} \left(\frac{k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + v_i \right)}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t)} \\ & + \frac{k_{2i} u_{d_{oi}}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t) \Delta_i^3} \\ & \times ((1 + x_{ei}^2) \left(\frac{-k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + \Phi_{2i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \right) \\ & - x_{ei} y_{ei} \times \left(\frac{-k_{1i} x_{ei}}{\Delta_i} + \Phi_{1i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \right)) \quad (24) \\ & - \frac{k_{2i} u_{d_{oi}} x_{ei} y_{ei} u_{ei}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t) \Delta_i^3} - \frac{k_{2i} u_{d_{oi}} x_{ei}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t) \Delta_i^3} r_i \\ & + \frac{u_{d_{oi}}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t)} \times \left(-\frac{m_{11} v_i}{m_{22}} - \frac{d_{22i}}{m_{22}} u_i r_i \right) \\ & + c_i r_i + \frac{1}{m_{22}} (-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) \\ & + \kappa_{3i} w_i \end{aligned}$$

در رابطه بالا κ_{3i} به صورت رابطه زیر است:

$$\kappa_{3i} = \frac{k_{2i} u_{d_{oi}}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t) \Delta_i^3} (\kappa_{1i} (1 + x_{ei}^2) - \kappa_{2i} x_{ei} y_{ei}) \quad (25)$$

در این مرحله r_i باید به عنوان کنترلر مجازی برای پایدار سازی $\bar{\psi}_{ei}$ انتخاب شود. با جایگذاری معادله آخر رابطه (۱۵) در رابطه (۲۴)، به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta_{ri} = & \frac{1}{d_{1i}} [-k_{3i} \bar{\psi}_{ei} + \bar{r}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \\ & + \frac{\dot{u}_{d_{oi}} \left(\frac{k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + v_i \right)}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t)} - \frac{k_{2i} u_{d_{oi}}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2(s_i, t) \Delta_i^3} \\ & \times ((1 + x_{ei}^2) \left(\frac{-k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + \Phi_{2i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \right) \\ & - x_{ei} y_{ei} \times \left(\frac{-k_{1i} x_{ei}}{\Delta_i} + \Phi_{1i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \right)) \quad (26) \\ & + \frac{m_{11} v_i u_{d_{oi}}}{m_{22}} - \frac{1}{m_{22}} (-\hat{b}_{ui} \sin(\psi_i) \\ & + \hat{b}_{vi} \cos(\psi_i))] \end{aligned}$$

* مرحله ۱: پایداری x_{ei} مورد بررسی قرار می‌گیرد. با جایگذاری دو رابطه‌ی اول عبارت (۱۵) در معادله اول رابطه (۱۳) و با استفاده از رابطه (۱۴) داریم:

$$\dot{x}_{ei} = u_{ei} + \beta_{ui} - u_{di} \cos(\beta_{\psi_{ei}}) + r_i y_{ei} + u_{di} \Phi_{1i} \quad (16)$$

که $\Phi_{1i} = -((\cos(\bar{\psi}_{ei}) - 1) \cos(\beta_{\psi_{ei}}) - \sin(\bar{\psi}_{ei}) \sin(\beta_{\psi_{ei}}))$ است. با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\dot{x}_{ei} = u_{ei} + \beta_{ui} - \bar{u}_{di} (\mathcal{G}_i(s_i, t) - w_i) \cos(\beta_{\psi_{ei}}) + r_i y_{ei} + u_{di} \Phi_{1i} \quad (17)$$

با توجه به رابطه (۱۷) قانون کنترلی مجازی β_{ui} به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\beta_{ui} = \frac{-k_{1i} x_{ei}}{\Delta} + \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \cos(\beta_{\psi_{ei}}) \quad k_{1i} > 0 \quad (18)$$

که $\Delta_i = \sqrt{1 + x_{ei}^2 + y_{ei}^2}$ است. در نهایت نیز معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\dot{x}_{ei} = \frac{-k_{1i} x_{ei}}{\Delta_i} + u_{ei} + r_i y_{ei} + \Phi_{1i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) + \kappa_{1i} w_i \quad (19)$$

که $\kappa_{1i} = -\bar{u}_{di} \cos(\beta_{\psi_{ei}}) - \Phi_{1i} \bar{u}_{di}$ تعریف می‌شود.

* مرحله ۲: در این قسمت y_{ei} پایدار می‌گردد. در ابتدا قانون کنترلی مجازی $\beta_{\psi_{ei}}$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۹، ۳۱].

$$\beta_{\psi_{ei}} = -\arctan \left(\frac{\frac{k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + v_i}{u_{d_{oi}}} \right) \quad k_{2i} > 0 \quad (20)$$

حال معادله دوم رابطه (۱۵) در معادله دوم رابطه‌ی (۱۳) جایگذاری شده و رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\dot{y}_{ei} = v_i + \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) \sin(\beta_{\psi_{ei}}) - r_i x_{ei} + \Phi_{2i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) + \kappa_{2i} w_i \quad (21)$$

که Φ_{2i} و κ_{2i} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi_{2i} = & (\sin(\bar{\psi}_{ei}) \cos(\beta_{\psi_{ei}}) + (\cos(\bar{\psi}_{ei}) - 1) \sin(\beta_{\psi_{ei}})) \\ \kappa_{2i} = & -\bar{u}_{di} \sin(\beta_{\psi_{ei}}) - \Phi_{2i} \bar{u}_{di} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۲۰) و انتخاب $\mathcal{G}_i(s_i, t)$ به صورت:

$$\mathcal{G}_i(s_i, t) = \frac{\sqrt{u_{d_{oi}}^2 + \left(\frac{k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + v_i \right)^2}}{\bar{u}_{di}} \quad (22)$$

رابطه (۲۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

که $k_{4i} > 0$ است. با جایگذاری رابطه (۳۰) در (۲۹) معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\dot{u}_{ei} = -k_{4i} u_{ei} - d_{2i} \bar{\psi}_{ei} + \frac{1}{m_{11}} (\tilde{b}_{ui} \cos(\psi_i)) \quad (31)$$

$$+ \tilde{b}_{vi} \sin(\psi_i) - \frac{x_{ei}}{\Delta_i} + \kappa_{5i} w_i$$

که $\kappa_{5i} = -\bar{u}_{di} \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial x_{ei}} \cos(\psi_{ei}) + \bar{u}_{di} \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial y_{ei}} \sin(\psi_{ei})$ است.

برای بدست آوردن ورودی کنترلی τ_{ri} از معادله‌ی آخر رابطه (۱۵) با توجه به روابط (۱۳) مشتق‌گیری می‌شود. لازم به ذکر است که β_{ri} تابعی از x_{ei} ، y_{ei} ، ψ_{ei} ، $u_{d_{oi}}$ ، $\dot{u}_{d_{oi}}$ ، s_i ، \hat{b}_{vi} و \hat{b}_{ui} است [۲۹].

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ei} &= \dot{r}_i - \dot{\beta}_{ri} \\ &= \varphi_{ri} + \frac{m_{22}}{f} \tau_{ri} \\ &+ \frac{m_{23}}{f} (b_{ui} \sin(\psi_i) - b_{vi} \cos(\psi_i)) \\ &+ \frac{m_{22}}{f} b_{ri} - \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial u_{d_{oi}}} \dot{u}_{d_{oi}} - \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \dot{u}_{d_{oi}}} \ddot{u}_{d_{oi}} \\ &- \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial x_{ei}} \dot{x}_{ei} - \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial y_{ei}} \dot{y}_{ei} - \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \psi_{ei}} \dot{\psi}_{ei} \\ &- \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial s_i} (\mathcal{G}_i - w_i) - \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \hat{b}_{ui}} \dot{\hat{b}}_{ui} - \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \hat{b}_{vi}} \dot{\hat{b}}_{vi} \end{aligned} \quad (32)$$

با توجه به رابطه (۳۲)، ورودی کنترلی τ_{ri} به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \tau_{ri} &= \frac{f}{m_{23}} [-\varphi_{ri} - \frac{m_{23}}{f} (\hat{b}_{ui} \sin(\psi_i) - \hat{b}_{vi} \cos(\psi_i)) \\ &- \frac{m_{22}}{f} \hat{b}_{ri} + \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial u_{d_{oi}}} \dot{u}_{d_{oi}} + \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \dot{u}_{d_{oi}}} \ddot{u}_{d_{oi}} \\ &+ \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial x_{ei}} (u_i - \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i \cos(\psi_{ei}) + r_i y_{ei}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$+ \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial y_{ei}} (v_i + \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i \sin(\psi_{ei}) - r_i x_{ei})$$

$$+ \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \psi_{ei}} (r_i - \bar{r}_{di} \mathcal{G}_i) - d_{1i} \bar{\psi}_{ei} - k_{5i} r_{ei}]$$

که $k_{5i} > 0$ است. با جایگذاری رابطه‌ی (۳۳) در (۳۲) معادله‌ی زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ei} &= -k_{5i} r_{ei} - d_{1i} \bar{\psi}_{ei} + \frac{m_{23}}{f} (\tilde{b}_{ui} \sin(\psi_i)) \\ &- \tilde{b}_{vi} \cos(\psi_i) + \frac{m_{22}}{f} \tilde{b}_{ri} + \kappa_{6i} w_i \end{aligned} \quad (34)$$

که

که $k_{3i} > 0$ است. همچنین درایم:

$$d_{1i} = \left(1 - \frac{k_{2i} u_{d_{oi}} x_{ei}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2 (s_i, t) \Delta_i^3} + \frac{u_{d_{oi}} (c_i - \frac{d_{22i}}{m_{22}} \beta_{ui})}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2 (s_i, t)} \right) \quad (27)$$

در رابطه‌ی (۲۶)، \hat{b}_{vi} و \hat{b}_{ui} مقادیر تخمین زده شده‌ی b_{vi} و b_{ui} هستند که روابط آنها در ادامه ارائه می‌گردد. در نهایت با جایگذاری رابطه (۲۶) و همچنین معادله آخر رابطه (۱۵) در (۲۴)، معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_{ei} &= -k_{3i} \bar{\psi}_{ei} + d_{1i} r_{ei} + d_{2i} u_{ei} + \kappa_{4i} w_i \\ &+ \frac{1}{m_{22}} (-\tilde{b}_{ui} \sin(\psi_i) + \tilde{b}_{vi} \cos(\psi_i)) \end{aligned} \quad (28)$$

که $(\hat{\bullet}) = (\bullet) - (\bar{\bullet})$ نشان دهنده خطای تخمین زده شده است.

همچنین $\kappa_{4i} = \kappa_{3i} + \bar{r}_{di}$ بوده و

$$d_{2i} = - \left(\frac{u_{d_{oi}} \frac{d_{22i}}{m_{22}}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2 (s_i, t)} + \frac{k_{2i} u_{d_{oi}} x_{ei} y_{ei}}{\bar{u}_{di}^2 \mathcal{G}_i^2 (s_i, t) \Delta_i^3} \right)$$

است.

* مرحله ۴: در ابتدا از دو طرف معادله اول رابطه (۱۵) با توجه به روابط معادله (۱۳) مشتق‌گیری می‌شود. در نتیجه رابطه زیر استخراج می‌شود. لازم به ذکر است که β_{ui} تابعی از x_{ei} ، y_{ei} و $u_{d_{oi}}$ است [۲۹].

$$\begin{aligned} \dot{u}_{ei} &= \dot{u}_i - \dot{\beta}_{ui} \\ &= \varphi_{ui} + \frac{1}{m_{11}} \tau_{ui} + \frac{1}{m_{11}} (b_{ui} \cos(\psi_i)) \\ &+ b_{vi} \sin(\psi_i) - \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial x_{ei}} \dot{x}_{ei} - \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial y_{ei}} \dot{y}_{ei} \\ &- \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial u_{d_{oi}}} \dot{u}_{d_{oi}} \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲۹) ورودی کنترلی τ_{ui} به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{ui} &= m_{11} (-\varphi_{ui} - \frac{1}{m_{11}} (\hat{b}_{ui} \cos(\psi_i) + \hat{b}_{vi} \sin(\psi_i)) \\ &+ \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial x_{ei}} (u_i - \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i \cos(\psi_{ei}) + r_i y_{ei}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$+ \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial y_{ei}} (v_i + \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i \sin(\psi_{ei}) - r_i x_{ei})$$

$$+ \frac{\partial \beta_{ui}}{\partial u_{d_{oi}}} \dot{u}_{d_{oi}} - k_{4i} u_{ei} - d_{2i} \bar{\psi}_{ei} - \frac{x_{ei}}{\Delta_i}$$

بوده و ضرایب هیدرودینامیک آنها یکسان است. تمام مفاهیم پایه ای برای مدل سازی شبکه ارتباطی در قسمت های قبلی بیان شده است. به منظور دست یابی به حرکت هماهنگ زیرسطحی ها علاوه بر ارضا شدن شرط (۵)، شرط زیر نیز باید برقرار گردد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |s_i(t) - s_j(t)| = 0 \quad \forall i, j \in I \quad (38)$$

در قضیه ۱، جمله فیدبک w_i به نحوی تعیین شد که هر زیرسطحی به مسیر خود همگرا شده و شروع به تعقیب آن کند. برای مسئله کنترل آرایش ضروری است که هماهنگی پارامتر مسیر s_i ارضا شود. بدین منظور مسئله ی کنترل آرایش، با توپولوژی ارتباط بین عوامل که توسط ماتریس G مشخص می شود، مطرح می گردد. بدین منظور با استفاده از قاعده لیاپانوف، قانون کنترلی نامتمرکز برای w_i ارائه می گردد. این قانون کنترلی با استفاده از اطلاعات بدست آمده از عوامل همسایه است. همچنین برای ساده سازی، نمادسازی $\mathcal{X} = [x_i]_{n \times 1}$ ، $\mathcal{G} = [g_i]_{n \times 1}$ ، $\mathcal{S} = [s_i]_{n \times 1}$ ، $\Gamma = [w_i]_{n \times 1}$ می شود. رابطه ی (۱۴) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{\mathcal{S}} = \mathcal{G} - \Gamma \quad (39)$$

طراحی ترم Γ ، مطابق زیر است [۱۵، ۳۱]:

$$\Gamma = \mathbf{K}_1^{-1} (S^T L \mathcal{G}) \mathbf{1} + \mathbf{K}_1^{-1} (L S + \chi) - \mathbf{z} \quad (40)$$

که در آن $\mathbf{1} = [\mathbf{1}]_{n \times 1}$ است. همچنین L ماتریس لاپلاسی بر اساس گراف ارتباطی G است و \mathbf{z} نیز متغیر کمکی است که دارای رابطه ی زیر است:

$$\dot{\mathbf{z}} = -(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{z} + L S + \chi + (S^T L \mathcal{G}) \mathbf{1} \quad (41)$$

که \mathbf{K}_1 و \mathbf{K}_2 ماتریس های مثبت معین قطری هستند. در نهایت معادلات مدار بسته برای ایجاد هماهنگی بین عوامل و رسیدن به کنترل آرایش به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= -(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{z} + L S + \chi + (S^T L \mathcal{G}) \mathbf{1} \\ \dot{\mathcal{S}} &= \mathcal{G} + \mathbf{z} - \mathbf{K}_1^{-1} L S - \mathbf{K}_1^{-1} \chi - \mathbf{K}_1^{-1} (S^T L \mathcal{G}) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (42)$$

حال می توان مسئله ی تعقیب مسیر هماهنگ شده بین عوامل که باعث ایجاد کنترل آرایش (روابط (۵) و (۳۸)) می شود را به صورت قضیه زیر بیان نمود:

قضیه ۲: مسئله کنترل آرایش n زیرسطحی که عامل i ام به وسیله قوانین کنترلی (۳۰)، (۳۳) و (۳۶)، مسیر (s_i) را تعقیب می کند و ماتریس لاپلاسی گراف متصل G ، که نمایش دهنده شبکه ارتباطی بین عوامل است با L نمایش داده شود، با

$$\begin{aligned} \kappa_{6i} &= -\bar{u}_{di} \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial x_{ei}} \cos(\psi_{ei}) + \bar{u}_{di} \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial y_{ei}} \sin(\psi_{ei}) \\ &\quad - \bar{r}_{di} \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \psi_{ei}} + \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial s_i} \end{aligned} \quad (35)$$

است. همچنین معادلات تخمین \hat{b}_{ui} ، \hat{b}_{vi} و \hat{b}_{ri} طبق روابط زیر به روزرسانی می شود (این معادلات با توجه به اثبات پایداری معادلات مدار بسته انتخاب شده است که در ادامه ذکر می شود):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}_{ui} &= -\frac{1}{m_{22}} \sin(\psi_i) \bar{\psi}_{ei} + \frac{1}{m_{11}} \cos(\psi_i) u_{ei} \\ &\quad + \frac{m_{23}}{f} \sin(\psi_i) r_{ei} \\ \dot{\hat{b}}_{vi} &= \frac{1}{m_{22}} \cos(\psi_i) \bar{\psi}_{ei} + \frac{1}{m_{11}} \sin(\psi_i) u_{ei} \\ &\quad - \frac{m_{23}}{f} \cos(\psi_i) r_{ei} \\ \dot{\hat{b}}_{ri} &= \frac{m_{22}}{f} r_{ei} \end{aligned} \quad (36)$$

در نهایت می توان قضیه زیر را به منظور ارائه کنترلر تعقیب مسیر ارائه نمود:

قضیه ۱: با فرض اینکه مسیر (s_i) برای هر زیرسطحی هموار باشد و ترم w_i به صورت زیر تعیین گردد:

$$\dot{w}_i = -w_i - \chi_i \quad (37)$$

بنحوی که

$$\chi_i = \frac{\kappa_{1i} x_{ei}}{\Delta_i} + \frac{\kappa_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} + \kappa_{4i} \bar{\psi}_{ei} + \kappa_{5i} u_{ei} + \kappa_{6i} r_{ei}$$

گردد، در نتیجه قانون کنترلی τ_{ri} و τ_{ui} ارائه شده در روابط (۳۰) و (۳۳) و همچنین قانون به روزرسانی (۳۶)، مسئله کنترل تعقیب مسیر (رابطه (۵)) را حل می کند. در نتیجه تمام سیگنالهای سیستم مدار بسته کران دار هستند. مخصوصاً خطاهای تعقیب مسیر $(\bar{\psi}_{ei}, y_{ei}, x_{ei})$ به طور مجانبی به سمت صفر می روند. در نتیجه، موقعیت تعقیب مسیر واقعی $(y_i - y_{di}, x_i - x_{di})$ و $(\psi_i - \psi_{di})$ به ترتیب به سمت صفر و دایره ای با شعاع کمتر از 0.5π همگرا می شوند.

اثبات قضیه در پیوست ارائه شده است. ■

۴- طراحی کنترلر به منظور حرکت گروهی هماهنگ زیرسطحی ها

طراحی کنترل آرایش برای یک گروه زیرسطحی با استفاده از شبکه ارتباطی بین عوامل انجام می گیرد. این شبکه اطلاعات مورد نیاز از جمله موقعیت ها و سرعت های عوامل را بین یکدیگر رد و بدل می کند. بدین منظور باید توپولوژی شبکه ارتباطی مورد بررسی قرار گیرد. همچنین فرض می شود که تمام زیرسطحی ها همانند هم

عمومی یک بیضی با قطر بزرگ a و قطر کوچک b و مرکز (x_o, y_o) به صورت زیر است:

$$l \equiv \left[\frac{\cos(\phi)x_1 + \sin(\phi)x_2}{a} \right]^2 + \left[\frac{-\sin(\phi)x_1 + \cos(\phi)x_2}{b} \right]^2 - 1 = 0 \quad (45)$$

که x_1 و x_2 در معادله (۴۳) تعریف شده‌اند. همچنین ϕ نمایش دهنده زاویه قطر بزرگتر نسبت به محور افقی در مختصات عمومی است. توابع h_1 و h_2 نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند و در این رابطه Ωt نمایش دهنده سرعت دورانی حرکت ذره روی سیکل حد است.

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2, t) = -x_2 \dot{\phi} + \frac{(\Omega + \dot{\Omega}t)}{ab} \times (h_{e11} x_1 - h_{e12} x_2) \\ h_2(x_1, x_2, t) = +x_1 \dot{\phi} + \frac{(\Omega + \dot{\Omega}t)}{ab} \times (h_{e21} x_1 - h_{e11} x_2) \end{cases} \quad (46)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} h_{e11} &= (a^2 - b^2) \sin(\phi) \cos(\phi) \\ h_{e12} &= a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi) \\ h_{e21} &= b^2 \cos^2(\phi) + a^2 \sin^2(\phi) \end{aligned} \quad (47)$$

به منظور ایجاد یک مسیر هموار پارامترهای $k_1(t)$ و $k_2(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۲۳]:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{15} \Delta t^5 + k_{14} \Delta t^4 + k_{13} \Delta t^3 \\ &\quad + k_{12} \Delta t^2 + k_{11} \Delta t^1 + k_{10} \\ k_2 &= k_1 \end{aligned} \quad (48)$$

که در آن $\Delta t = t_1 - t_0$ زمان گذار است. برای حل رابطه (۴۸) نیاز به ۶ شرط است که این شرایط در رابطه (۴۹) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} k_1(t_0) &= \bar{k}_1 / 100 \quad k_1(t_1) = \bar{k}_1 \\ \dot{k}_1(t_0) &= \ddot{k}_1(t_0) = \dot{k}_1(t_1) = \ddot{k}_1(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

به منظور ایجاد یک مسیر هموار فرض زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_5 \Delta t^5 + \Omega_4 \Delta t^4 + \Omega_3 \Delta t^3 \\ &\quad + \Omega_2 \Delta t^2 + \Omega_1 \Delta t^1 + \Omega_0 \end{aligned} \quad (50)$$

برای بدست آوردن ضرایب رابطه (۵۰)، شرایط زیر در نظر گرفته می‌شود:

فرض اینکه ارتباط بین عوامل مستمر و بدون تاخیر باشد، با استفاده از رابطه (۴۲) اثبات شده و روابط (۵) و (۳۸) ارضا می‌شود. اثبات قضیه در پیوست ارائه شده است.

۵ - طراحی روش اجتناب از برخورد به وسیله سیکل حد

در این قسمت الگوریتمی به منظور جلوگیری از برخورد عوامل با موانع و همچنین با یکدیگر با توجه به حرکت هماهنگ گروه زیرسطحی ارائه می‌شود و الگوریتم ارائه شده بر مبنای مراجع [۲۱، ۲۳] است. در این روش، هر مانع که شامل موانع متحرک می‌شود، به وسیله‌ی یک بیضی که نمایش دهنده یک سیکل حد پایدار است احاطه می‌شود. ایده‌ی استفاده از این روش نیز به این صورت است که هنگامی که یک زیرسطحی وارد ناحیه محافظت شده یک مانع می‌شود، کنترلگر نامتمرکز طراحی شده در قسمت ۴ برای هر زیرسطحی، به الگوریتم اجتناب از برخورد با مانع، سوئیچ می‌کند. در نتیجه زیرسطحی مسیر ایجاد شده توسط سیکل حد را طی می‌کند و وقتی که خطر مانع رفع شد، دوباره به الگوریتم کنترلی نامتمرکز برای حرکت گروهی سوئیچ می‌کند.

۵-۱- طراحی مسیر به وسیله سیکل حد

روش ارائه شده به منظور طراحی مسیر دور مانع به وسیله ایجاد معادلات دیفرانسیلی که نمایش دهنده سیکل حد پایدار است در این قسمت بررسی می‌شود. در این حالت متغیرهای حالت مسیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_1 = x_i - x_{oj} \quad x_2 = y_i - y_{oj} \quad (43)$$

که (x_{oj}, y_{oj}) نمایش دهنده موقعیت مرکز مانع j ام (سیکل حد j ام) در مختصات کلی است. همچنین (x_i, y_i) نمایش دهنده موقعیت زیرسطحی i ام بوده که در معرض خطر با مانع j ام است. به منظور مدل‌سازی موانع متحرک، مرکز سیکل حد j ام تابعی از زمان است. حال با فرض اینکه سیکل حد به صورت $l(x_1, x_2, t)$ نمایش داده شود، معادلات ایجاد کننده مسیر مرجع برای زیرسطحی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h_1(x_1, x_2, t) - k_1 x_1 l(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = h_2(x_1, x_2, t) - k_2 x_2 l(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (44)$$

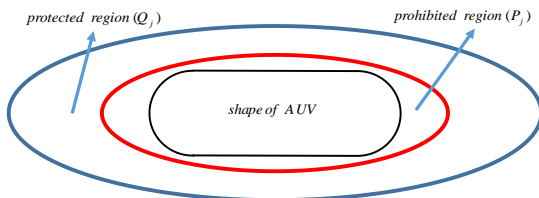
که توابع $h_1(x_1, x_2, t)$ و $h_2(x_1, x_2, t)$ نمایش دهنده حرکت سینماتیک یک ذره روی سیکل حد است هنگامی که $l(x_1, x_2, t) = 0$ برقرار شود. رابطه (۴۴) یک مسیر مرجع برای زیرسطحی ایجاد می‌کند که توسط کنترلگر طراحی شده در قسمت ۳ تعقیب می‌شود. سیکل حد $l(x_1, x_2, t)$ به وسیله معادله

$$\begin{aligned} x_{1ij} &= x_i - x_{oj} \\ x_{2ij} &= y_i - y_{oj} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{1ij} = h_{1ij}(x_{1ij}, x_{2ij}, t) - k_{1ij} x_{1ij} l(x_{1ij}, x_{2ij}, t) \\ \dot{x}_{2ij} = h_{2ij}(x_{1ij}, x_{2ij}, t) - k_{2ij} x_{2ij} l(x_{1ij}, x_{2ij}, t) \end{cases}$$

۴. مسیر (x_i, y_i) را به عنوان مسیر مرجع برای زیرسطحی i ام در نظر گرفته و آن را به وسیله کنترلرگرا ارائه شده در قسمت ۳ تعقیب کن.

برای بحث اجتناب از برخورد بین عوامل روش بالا نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. مشخص است که هر زیرسطحی موقعیت و سرعت دیگر زیرسطحی‌ها را در اختیار دارد. برای همین برای هر زیرسطحی دو ناحیه ممنوعه و محافظت شده مطابق شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود.

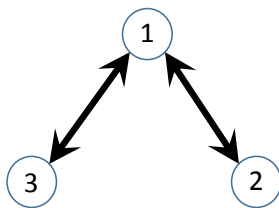


شکل ۳- نمایش نواحی در نظر گرفته شده برای یک زیرسطحی

حال برای گروه زیرسطحی هنگامی که به هم نزدیک می‌شوند و نواحی محافظت شده‌ی آنها با هم تداخل پیدا می‌کند، زیرسطحی با اندیس بیشتر به عنوان مانع در نظر گرفته شده و با توجه به معادلات سیکل حد، دور آن مسیری طراحی می‌شود که زیرسطحی با اندیس کمتر این مسیر را تعقیب می‌کند تا خطر برخورد بین عوامل نیز از بین برود. به محض اینکه خطر برخورد رفع شد، کنترلرگرا زیرسطحی با اندیس کمتر به کنترلرگرا حرکت گروهی سوئیچ می‌کند.

۶- نتایج به کار بستن کنترلرگرا

در این قسمت به منظور نشان دادن عملکرد صحیح کنترلرگرا طراحی شده در رسیدن به آرایش مورد نظر و همچنین جلوگیری از برخورد زیرسطحی‌ها به موانع و همچنین با یکدیگر، کنترلرگرا به صورت عملی به کار برده می‌شود. بدین منظور فرض می‌شود که ۳ زیرسطحی وجود دارد که قرار است به آرایش خطی برسند. شبکه ارتباطی عوامل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

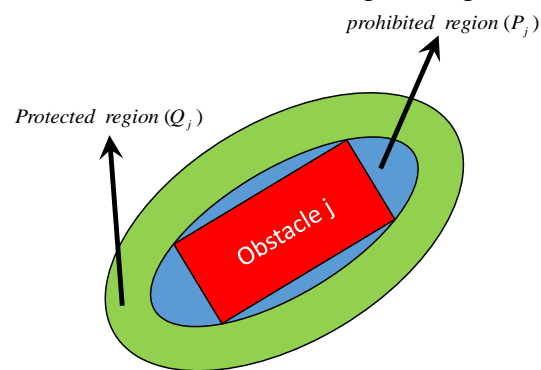


شکل ۴- مدل سازی شبکه ارتباطی بین عوامل

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_1 - t_0 \\ \Omega(t_0) &= \bar{\Omega} / 100 \quad \Omega(t_1) = \bar{\Omega} \\ \dot{\Omega}(t_0) &= \ddot{\Omega}(t_0) = \dot{\Omega}(t_1) = \ddot{\Omega}(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

۵- ۲- روش اجتناب از برخورد

در این قسمت استراتژی اجتناب از برخورد برای گروه زیرسطحی ارائه می‌شود. بدین منظور مانع j ام در نظر گرفته می‌شود. برای این مانع، یک ناحیه ممنوعه P_j و یک ناحیه حفاظت شده Q_j در نظر گرفته می‌شود که دور مانع را احاطه کرده‌اند (مطابق شکل ۲). مشخص است که $P_j \subset Q_j$ است. با توجه به نواحی مشخص شده ناحیه ایمن مانع j ام به صورت $R_j \triangleq R^2 \setminus Q_j$ مشخص می‌شود که R^2 نمایش دهنده کل فضای صفحه است.



شکل ۲- نمایش نواحی در نظر گرفته برای یک مانع

برای شرح الگوریتم فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱. حداکثر سرعت زیرسطحی‌ها از حداکثر سرعت موانع بیشتر است.
۲. موقعیت تمام موانع از قبل برای تمام زیرسطحی مشخص بوده و همچنین برای هر مانع یک بیضی تقریب زده می‌شود.
- روش اجتناب از برخورد به صورت زیر است:
 ۱. موقعیت تولید شده توسط مسیر $\xi_i(s_i)$ ، $i = 1:N$ را برای هر زیرسطحی به عنوان هدف قرار داده و آن را برابر با (x_{ii}, y_{ii}) در نظر بگیر.
 ۲. با توجه به موقعیت حقیقی زیرسطحی i ام، $i = 1:N$ و (x_{ii}, y_{ii}) یک پاره خط رسم کن و معادله پاره خط به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$b_i(t): y_{bi} = y_{ii} + \frac{y_{ii} - y_i}{x_{ii} - x_i} (x_{bi} - x_i) \quad (52)$$

۳. اگر (x_{ii}, y_{ii}) وارد ناحیه محافظت شده مانع j ام، $j = 1:M$ شد یا پاره خط $b_i(t)$ با ناحیه ممنوعه مانع j ام تقاطعی داشت آنگاه برای زیرسطحی i ام، کنترلرگرا حرکت گروهی را قطع و شروع به ساختن مسیر مرجع با استفاده از معادلات زیر کن و در غیر این صورت به مرحله ۱ برو.

برای مدل سازی نیروها و ممان های محیطی اندازه ی بیشترین مقدار آنها به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$b_{u_i}^M = 0.5 \quad b_{v_i}^M = 0.75 \quad b_{n_i}^M = 0.5 \quad (55)$$

همچنین مسیر مرجع در نظر گرفته شده برای عوامل به صورت زیر است:

$$\text{if } (s_2) \leq \pi/0.05$$

$$\begin{cases} u_{d_{01}} = 1(m/s) \\ u_{d_{02}} = 1(m/s) \\ u_{d_{03}} = 1(m/s) \\ \begin{cases} x_{d1} = s_1 & y_{d1} = 0 \\ x_{d2} = s_2 & y_{d2} = +40 \\ x_{d3} = s_3 & y_{d3} = +20 \end{cases} \end{cases} \quad (56)$$

else $(s_2) \geq \pi/0.05$

$$\begin{cases} u_{d_{01}} = 1(m/s) \\ u_{d_{02}} = \sqrt{1 + (2 \sin(0.05s_3))^2} (m/s) \\ u_{d_{03}} = 1(m/s) \\ \begin{cases} x_{d1} = s_1 & y_{d1} = 0 \\ x_{d2} = s_2 & y_{d2} = -40 \cos(0.05s_3) \\ x_{d3} = s_3 & y_{d3} = +20 \end{cases} \end{cases}$$

همچنین در محیط ۵ مانع در نظر گرفته می شود. عوامل زیرسطحی سرعت و موقعیت موانع را در اختیار دارند. با کاربرد کنترلگر نتایج زیر استخراج می شود (شکل ۵)

در شکل ۵۵ حرکت سه زیرسطحی و همچنین حرکت موانع نشان داده شده است. طبق شکل، مانع ۱ و ۲ ثابت بوده و موانع ۳، ۴ و ۵ متحرک هستند. مطابق شکل در ابتدا خطر برخورد زیرسطحی ۱ با زیرسطحی ۲ ایجاد می شود که با استفاده از روش اجتناب از برخورد بین عوامل از برخورد جلوگیری می شود. مطابق شکل زیرسطحی ۲ مانعی برای زیرسطحی ۱ در نظر گرفته می شود. بنابراین پیرامون زیرسطحی ۲ یک سیکل حد تشکیل می شود که مسیر مرجعی برای زیرسطحی ۱ طراحی می کند و این مسیر مرجع توسط کنترلگر تعقیب مسیر زیرسطحی ۱ تعقیب می شود تا خطر برخورد بین این:

با توجه به شکل ۴۴ مشخص است که ماتریس لاپلاسین آن متقارن است و ضرایب هیدرودینامیکی زیرسطحی در جدول ۲ ارائه شده است [۱].

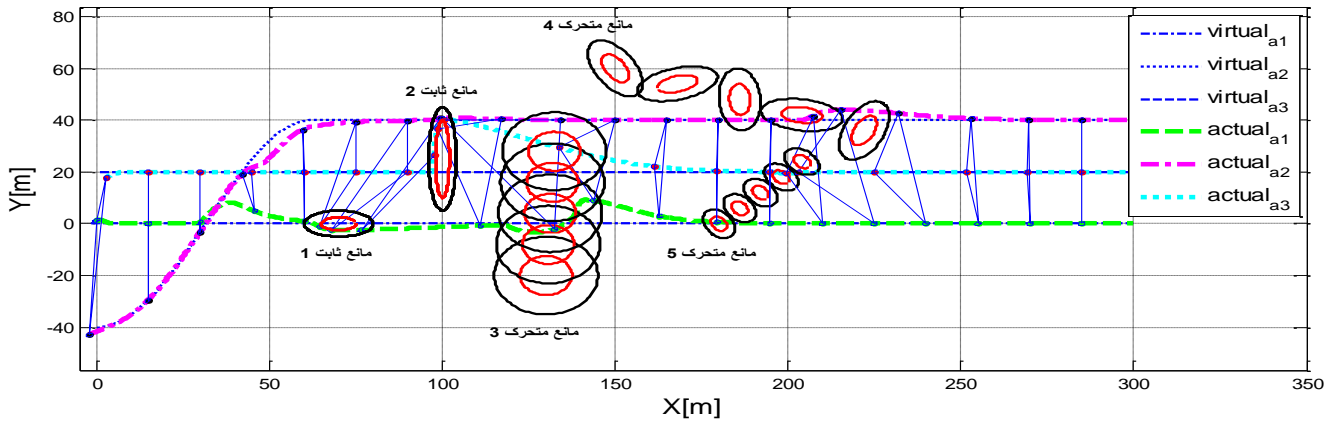
جدول ۲- ضرایب هیدرودینامیکی یک زیرسطحی [۱]

واحد	مقدار	نماد	پارامتر
kg	۲۲/۸	m	جرم
kg.m ²	۱/۷۶	I _z	اینرسی دورانی
kg	-۲	X _{ii}	جرم افزوده
kg	-۱۰	Y _{vi}	جرم افزوده
kg.m ²	-۱	N _{ri}	جرم افزوده
kg.m	۰	Y _{ri}	جرم افزوده
kg/s	-۰/۷۲۲	X _{uu}	ضریب درگ خطی سرچ
kg/s	-۰/۸۶۱	Y _{vu}	ضریب درگ خطی سووی
kg.m ² /s	۰	N _{ru}	ضریب درگ خطی یاو
kg.m/s	۰/۱۰۷	Y _{ru}	ضریب درگ خطی عرضی
kg.m/s	۰/۱۰۵	N _{vu}	ضریب درگ خطی عرضی
kg/m	-۱/۳۲۷	X _{uv}	ضریب درگ مرتبه دو سرچ
kg/m	-۳۶/۲۸	Y _{uv}	ضریب درگ مرتبه دو سووی
kg	۰	Y _{vr}	ضریب درگ مرتبه دو عرضی
kg	۰	Y _{rv}	ضریب درگ مرتبه دو عرضی
kg.m	۰	Y _{rv}	ضریب درگ مرتبه دو عرضی
kg	۵/۰۴۳	N _{vv}	ضریب درگ مرتبه دو عرضی
kg.m	۰	N _{vr}	ضریب درگ مرتبه دو عرضی
kg.m	۰	N _{rv}	ضریب درگ مرتبه دو عرضی
kg.m ²	۰	N _{rv}	ضریب درگ مرتبه دو یاو
m	۰/۰۴۶	x _g	فاصله مرکز جرم تا مرکز شناوری

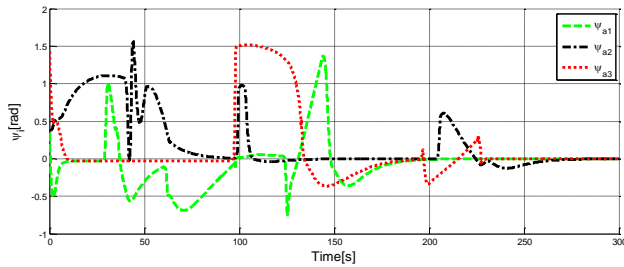
ضرایب استفاده شده در طراحی کنترلگر به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$k_{1i} = 1 \quad k_{2i} = 0.7 \quad k_{3i} = 1 \quad k_{4i} = 1 \quad k_{5i} = 1$$

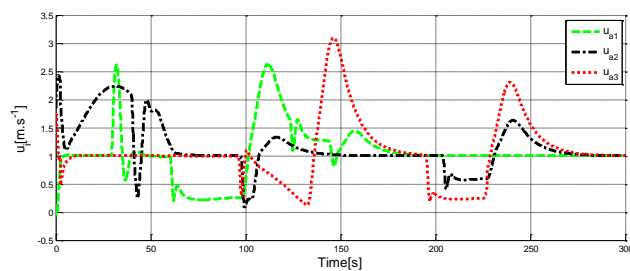
$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (54)$$



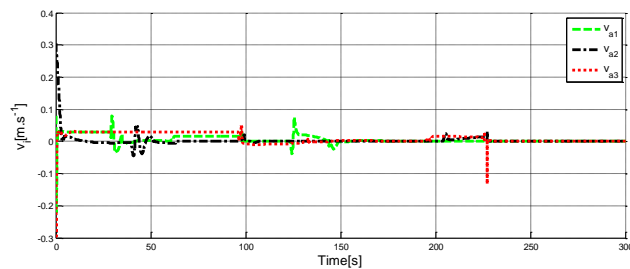
شکل ۵- نمودار حرکت سه زیرسطحی و رسیدن به آرایش خطی مورد نظر با اعمال مسئله پرهیز از برخورد عوامل با یکدیگر و با موانع



شکل ۶- نمودار زاویه گردش عوامل



شکل ۷- نمودار سرعت در راستای surge عوامل

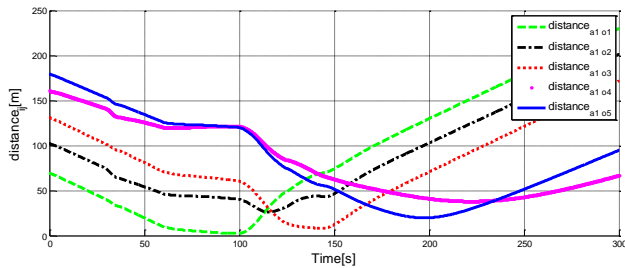


شکل ۸- نمودار سرعت در راستای sway عوامل

در شکل ۹ و شکل ۱۰ نمودار ورودی‌های کنترلی در راستای سرج و یاء ارائه شده است. مطابق شکل در لحظاتی که خطر برخورد وجود دارد ورودی‌های کنترلی افزایش یافته تا با تنظیم سرعت عوامل خطر برخورد از بین برود.

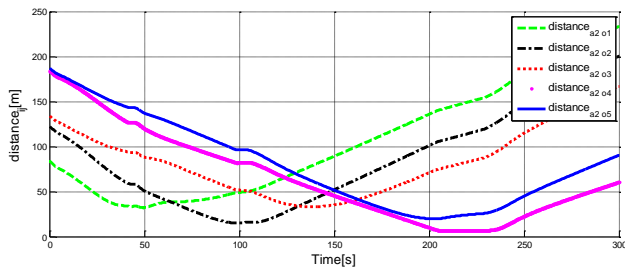
دو زیرسطحی از بین برود. بعد از رفع خطر برخورد بین این دو زیرسطحی، زیرسطحی شماره ۱ به کنترلگر تعقیب مسیر هماهنگ سوئیچ می‌کند تا آرایش خطی ایجاد شود. همین حالت نیز برای زیرسطحی‌های ۲ و ۳ نیز رخ می‌دهد. به این صورت که خطر برخورد بین این دو زیرسطحی ایجاد می‌شود ولی با استفاده از روش اجتناب از برخورد بین عوامل، زیرسطحی ۲، زیرسطحی ۳ را مانعی برای خود در نظر گرفته و با استفاده از سیکل حد ایجاد شده دور آن، از برخورد با زیرسطحی ۳ جلوگیری می‌کند. در ادامه نیز سه زیرسطحی شروع تعقیب مسیرهای خود به صورت هماهنگ می‌کنند به نحوی که آرایش خطی را تشکیل دهند. مطابق شکل، خطر برخورد زیرسطحی‌ها با موانع وجود دارد ولی کنترلگر اجتناب از برخورد بین عوامل و موانع از برخورد بین آنها جلوگیری می‌کند. در نهایت نیز بعد از رفع خطر برخورد عوامل با موانع، سه زیرسطحی به آرایش خطی دست می‌یابند.

در شکل ۶ نمودار زاویه گردش برای عوامل ارائه شده است. بدین منظور هنگامی که خطر برخورد برای زیرسطحی‌ها ایجاد می‌شود، با تغییر به موقع زاویه گردش از برخورد بین عوامل و همچنین عوامل با موانع جلوگیری می‌شود. در شکل ۷ نیز نمودار سرعت عوامل در راستای سرج ارائه می‌شود. مطابق شکل در لحظاتی که خطر برخورد برای عوامل وجود دارد، سرعت عوامل تغییر می‌کند تا خطر برخورد از بین برود. در نهایت نیز سرعت عوامل یکسان می‌شود که نشان از رسیدن زیرسطحی‌ها به آرایش خطی است. در شکل ۸ نیز نمودار سرعت عوامل در راستای سووی ارائه می‌شود. با توجه به این شکل، سرعت در این راستا همواره مقدار کمی است که نشان از عدم لغزش از مسیر است. فقط در لحظات برخورد این سرعت افزایش می‌یابد که این نیز ناشی از خطر برخورد است.

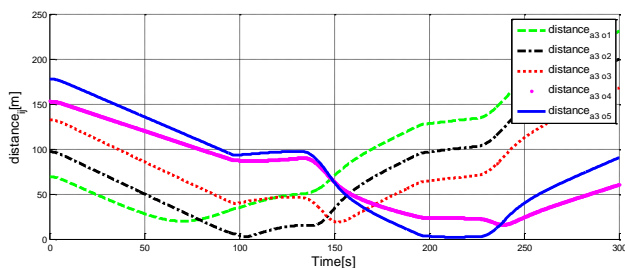


شکل ۱۲- نمودار فاصله بین زیرسطحی ۱ با موانع

در شکل ۱۳13 نیز نمودار فاصله زیرسطحی ۲ با موانع نشان داده شده است. مطابق شکل خطر برخورد زیرسطحی ۲ با موانع ۴ وجود داشته است ولی کنترلگر اجتناب از برخورد عمل کرده و برخوردی بین آنها رخ نمی‌دهد. همچنین شکل ۱۴14 نیز نمایش دهنده فاصله بین زیرسطحی ۳ با موانع است. مطابق این شکل خطر برخورد این زیرسطحی با موانع ۲ و ۵ وجود داشته است ولی رفع شده است و برخورد رخ نداده است.



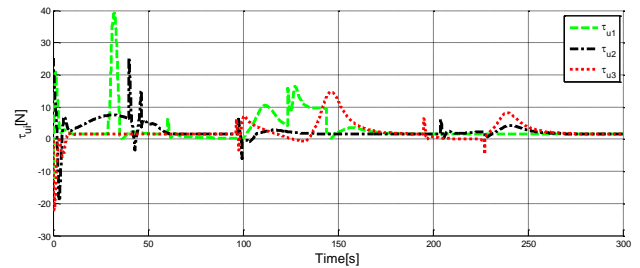
شکل ۱۳- نمودار فاصله بین زیرسطحی ۲ با موانع



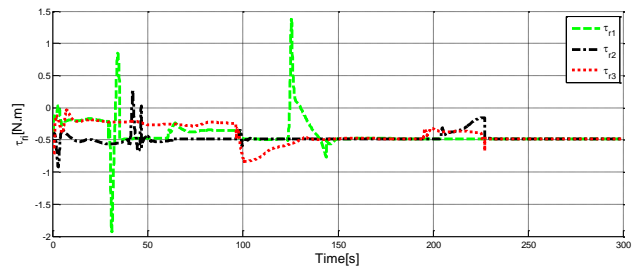
شکل ۱۴- نمودار فاصله بین زیرسطحی ۳ با موانع

۷ - نتیجه گیری

با توجه به اهمیت استفاده از شناورهای زیرسطحی به صورت گروهی و لزوم برخورد آنها به موانع در این پژوهش کنترل نامتمرکز، برای حرکت گروهی هماهنگ شناورهای زیرسطحی، با در نظر گرفتن مسئله اجتناب از برخورد بین عوامل و همچنین عوامل با موانع مورد بررسی قرار گرفت. روش کنترلی ارائه شده براساس تئوری گراف و روش گام به عقب با مدل سازی موانع با استفاده از سیکل حد است. برای طراحی کنترلگر در ابتدا با استفاده از روش گام به عقب کنترلگری به منظور تعقیب مسیر برای یک زیرسطحی طراحی شده است. سپس کنترلگر طراحی شده، با استفاده از قواعد تئوری گراف، برای گروه شناورهای

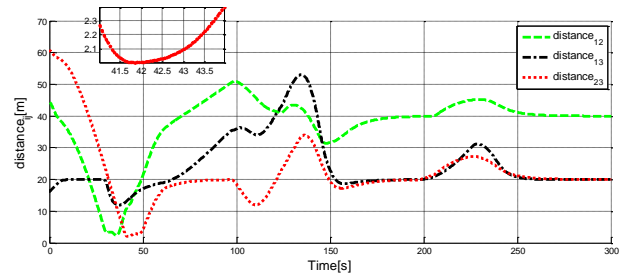


شکل ۹- نمودار ورودی‌های کنترلی τ_u برای عوامل در راستای surge برای عوامل



شکل ۱۰- نمودار ورودی‌های کنترلی τ_r برای عوامل در راستای yaw برای عوامل

در شکل ۱۱11 نیز فاصله زیرسطحی‌ها با یکدیگر ارائه شده است. مطابق این شکل خطر برخورد عامل دو یکبار با عامل ۱ و بار دیگر با عامل ۳ وجود دارد ولی کنترلگر اجتناب از برخورد بین عوامل از برخورد بین عوامل جلوگیری می‌کند. همچنین مطابق شکل نیز فاصله بین عوامل هیچ وقت صفر نمی‌شود که نشان دهنده عدم برخورد عوامل با یکدیگر است.



شکل ۱۱- نمودار فاصله بین عوامل

در شکل ۱۲12 نیز فاصله بین زیرسطحی ۱ با تمام موانع نشان داده شده است. مطابق شکل خطر برخورد زیرسطحی ۱ با موانع ۱ و ۳ وجود داشته است ولی به دلیل عملکرد کنترلگر اجتناب از برخورد بین آنها برخوردی رخ نمی‌دهد. زیرا فاصله بین آنها هیچ وقت صفر نمی‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & \frac{x_{ei}}{\Delta_i} \left(\frac{-k_{1i} x_{ei}}{\Delta_i} + u_{ei} + r_i y_{ei} \right) \\ & + \Phi_{1i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) + \kappa_{1i} w_i \\ & + \frac{y_{ei}}{\Delta_i} \left(\frac{-k_{2i} y_{ei}}{\Delta_i} - r_i x_{ei} \right) \\ & + \Phi_{2i} \bar{u}_{di} \mathcal{G}_i(s_i, t) + \kappa_{2i} w_i \\ & + \bar{\psi}_{ei} (-k_{3i} \bar{\psi}_{ei} + d_{1i} r_{ei} + d_{2i} u_{ei}) \\ & + \frac{1}{m_{22}} (-\tilde{b}_{ui} \sin(\psi_i) + \tilde{b}_{vi} \cos(\psi_i)) \\ & + \kappa_{4i} w_i \\ & + u_{ei} (-k_{4i} u_{ei} - d_{2i} \bar{\psi}_{ei} + \frac{1}{m_{11}} (\tilde{b}_{ui} \cos(\psi_i) \\ & + \tilde{b}_{vi} \sin(\psi_i)) - \frac{x_{ei}}{\Delta_i} + \kappa_{5i} w_i) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & + r_{ei} (-k_{5i} r_{ei} - d_{1i} \bar{\psi}_{ei} + \frac{m_{23}}{f} (\tilde{b}_{ui} \sin(\psi_i) \\ & - \tilde{b}_{vi} \cos(\psi_i)) + \frac{m_{22}}{f} \tilde{b}_{ni} + \kappa_{6i} w_i) \\ & + \tilde{b}_{ui} \dot{\tilde{b}}_{ui} + \tilde{b}_{vi} \dot{\tilde{b}}_{vi} + \tilde{b}_{ni} \dot{\tilde{b}}_{ni} \end{aligned}$$

حال اگر:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{b}}_{ui} = & -\frac{1}{m_{22}} \sin(\psi_i) \bar{\psi}_{ei} + \frac{1}{m_{11}} \cos(\psi_i) u_{ei} \\ & + \frac{m_{23}}{f} \sin(\psi_i) r_{ei} \\ \dot{\tilde{b}}_{vi} = & \frac{1}{m_{22}} \cos(\psi_i) \bar{\psi}_{ei} + \frac{1}{m_{11}} \sin(\psi_i) u_{ei} \\ & - \frac{m_{23}}{f} \cos(\psi_i) r_{ei} \\ \dot{\tilde{b}}_{ni} = & \frac{m_{22}}{f} r_{ei} \end{aligned} \quad (59)$$

در رابطه‌ی (58) جایگذاری شوند، و همچنین با توجه به اینکه Φ_{2i} و Φ_{1i} عباراتی کراندار هستند، معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}_i = & \frac{-k_{1i} x_{ei}^2 - k_{2i} y_{ei}^2}{\Delta_i^2} - k_{3i} \bar{\psi}_{ei}^2 \\ & - k_{4i} u_{ei}^2 - k_{5i} r_{ei}^2 + \chi_i w_i \end{aligned} \quad (60)$$

برای اینکه $\dot{V}_i \leq 0$ برقرار شود می‌توان $(\chi_i) = -\mu_i \tanh(\chi_i)$ را w_i در نظر گرفت و همچنین می‌توان w_i را مطابق رابطه (37) در نظر گرفت. در این صورت اگر تابع لیاپانوف زیر در نظر گرفته شود:

$$V_i = V_{1i} + V_{2i} + V_{3i} + \frac{1}{2} w_i^2 \quad (61)$$

و سپس از آن مشتق گیری شود، عبارت زیر به دست می‌آید:

زیرسطحی تعمیم داده شده است به نحوی که تعقیب مسیر برای گروه شناورهای زیرسطحی، به صورت هماهنگ بوده و در نتیجه گروه شناور زیرسطحی به آرایش مورد نظر و دلخواه برسند. همچنین در این پژوهش مسئله اجتناب از برخورد عوامل با موانع در نظر گرفته شده است. در صورت بروز خطر برخورد یک از عوامل زیرسطحی به مانع، یک سیکل حد پایدار دور مانع در طراحی شده و کنترلگر اجتناب از برخورد عمل می‌کند تا خطر برخورد عامل با مانع از بین برود. این امر شامل مسئله اجتناب از برخورد عوامل با یکدیگر نیز هست.

به منظور به کار بستن کنترلگر چندین مانع ثابت و متحرک نیز در فضای کاری در نظر گرفته می‌شود. نتایج نشان دهنده عملکرد مناسب کنترلگر طراحی شده است به نحوی که از برخورد عوامل با یکدیگر و همچنین برخورد عوامل با موانع جلوگیری می‌شود و بعد از رفع خطر برخورد بین عوامل و همچنین عوامل با موانع، گروه شناور زیرسطحی به آرایش خطی دست می‌یابند.

کلید واژگان

- 1- Underactuated
- 2- back stepping method

۸- پیوست

• اثبات قضیه ۱

در ابتدا تابع لیاپانوف زیر تعریف می‌شود.

$$V_i = V_{1i} + V_{2i} + V_{3i} \quad (57)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} V_{1i} = & \sqrt{1 + x_{ei}^2 + y_{ei}^2} - 1, V_{2i} = 0.5(\bar{\psi}_{ei}^2 + u_{ei}^2 + r_{ei}^2) \\ V_{3i} = & 0.5(\tilde{b}_{ui}^2 + \tilde{b}_{vi}^2 + \tilde{b}_{ni}^2) \end{aligned}$$

حال از رابطه (57) مشتق گیری می‌شود:

حال تغییر متغیر $W_{vi} = \sqrt{V_{vi}}$ انجام می‌گیرد. در نتیجه معادله دیفرانسیلی زیر استخراج می‌گردد:

$$\dot{W}_{vi} \leq -\frac{m_{11}}{m_{22}}W_{vi} + \frac{\sqrt{2}}{2}|Q_i| \quad (۶۷)$$

حال با انتگرال گیری از رابطه بالا:

$$W_{vi} \leq W_{vi}(t_0)e^{-\frac{m_{11}}{m_{22}}(t-t_0)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t e^{-\frac{m_{11}}{m_{22}}(t-x)} |Q_i| dx \quad (۶۸)$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} |\bar{v}_i| &\leq \bar{v}_i(t_0)e^{-\frac{m_{11}}{m_{22}}(t-t_0)} \\ &+ \frac{m_{22}}{m_{11}} \left[1 - e^{-\frac{m_{11}}{m_{22}}(t-t_0)} \right] \sup |Q_i| \\ &\leq \max \left\{ \bar{v}_i(t_0), \frac{m_{22}}{m_{11}} \sup |Q_i| \right\} := \bar{v}_{Mi} \end{aligned} \quad (۶۹)$$

که $\sup |Q_i|$ کران متناهی است. در نتیجه با توجه به عبارت بالا می‌توان نتیجه گرفت که \bar{v}_i دارای کران است. همچنین با توجه به رابطه (۶۳) و با توجه به کران \bar{v}_i می‌توان شعاع همگرایی ψ_{ei} را بدست آورد.

$$\bar{\psi}_{ei} = \psi_{ei} - \beta_{\psi_{ei}} \quad (۷۰)$$

در نهایت با جایگذاری روابط زیر می‌توان شعاع همگرایی را بدست آورد.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{ei} &= 0 \\ \Rightarrow \psi_{ei} &= \beta_{\psi_{ei}} = -\arctan \left(\frac{\bar{v}_{Mi}}{u_{d_{oi}}} \right) \\ \Rightarrow |\psi_{ei}| &= \left| \arctan \left(\frac{\bar{v}_{Mi}}{u_{d_{oi}}} \right) \right| < 0.5\pi \end{aligned} \quad (۷۱)$$

□

• اثبات قضیه ۲

تابع لیابانوف زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V_C = V_T + \frac{1}{2}(S^T LS + \mathbf{z}^T \mathbf{z}) \quad (۷۲)$$

حال از این رابطه نسبت به زمان مشتق گیری می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_C &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{-k_{1i}x_{ei}^2 - k_{2i}y_{ei}^2}{\Delta_i^2} - k_{3i}\bar{\psi}_{ei}^2 \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-k_{4i}u_{ei}^2 - k_{5i}r_{ei}^2) + \chi^T \Gamma \\ &+ \frac{1}{2}(S^T \dot{L}S + S^T L\dot{S} + \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (۷۳)$$

$$\dot{V}_i = \frac{-k_{1i}x_{ei}^2 - k_{2i}y_{ei}^2}{\Delta_i^2} - k_{3i}\bar{\psi}_{ei}^2 \quad (۶۲)$$

$$-k_{4i}u_{ei}^2 - k_{5i}r_{ei}^2 - w_i^2 \leq 0$$

بنابراین می‌توان مشاهده کرد که $x_{ei}, y_{ei}, \bar{\psi}_{ei}, r_{ei}, u_{ei}, w_i$ که $\bar{b}_{ui}, \bar{b}_{vi}, \bar{b}_{ni}$ کراندار هستند. حال با استفاده از لم باربالات [۳۲] می‌توان مشاهده کرد که:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{ei}, y_{ei}, \bar{\psi}_{ei}, r_{ei}, u_{ei}, w_i) = 0 \quad (۶۳)$$

□

• اثبات کرانداری \bar{v}_i

به منظور اثبات کرانداری \bar{v}_i ، تابع لیابانوف زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V_{vi} = \frac{1}{2}\bar{v}_i^2 \quad (۶۴)$$

از رابطه (۶۴) مشتق گیری می‌شود و در نتیجه رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{vi} &= \bar{v}_i \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}}\bar{v}_i - \frac{d_{22i}}{m_{22}}u_i r_i + c_i r_i \right. \\ &+ \frac{1}{m_{22}}(-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) \left. \right) \\ &= \bar{v}_i \left[-\frac{m_{11}}{m_{22}}\bar{v}_i - \frac{d_{22i}}{m_{22}}u_i r_i + c_i r_i \right. \\ &+ \frac{1}{m_{22}}(-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) \\ &- \left. \frac{m_{11}}{m_{22}}\varepsilon_i r_i + \frac{m_{11}}{m_{22}}\varepsilon_i r_i \right] \\ &= \bar{v}_i \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}}\bar{v}_i - \frac{d_{22i}}{m_{22}}u_i r_i + c_i r_i \right. \\ &+ \frac{1}{m_{22}}(-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) \\ &+ \left. \frac{m_{11}}{m_{22}}\varepsilon_i r_i \right) \end{aligned} \quad (۶۵)$$

$$= -\frac{m_{11}}{m_{22}}\bar{v}_i^2 + \bar{v}_i Q_i$$

$$= -2\frac{m_{11}}{m_{22}}V_{vi} + |Q_i| \sqrt{2V_{vi}}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} Q_i &= -\frac{d_{22i}}{m_{22}}u_i r_i + c_i r_i \\ &+ \frac{1}{m_{22}}(-b_{ui} \sin(\psi_i) + b_{vi} \cos(\psi_i)) + \frac{m_{11}}{m_{22}}\varepsilon_i r_i \end{aligned} \quad (۶۶)$$

approximation and limited communication ranges, *Automatica*. **48**, 1380-1388.

3- Dong, W., (2010), *Cooperative control of underactuated surface vessels*, *IET control theory & applications*. **4**, 1569-1580.

4- Cui, R., Sam Ge, S., Voon Ee How, B. & Sang Choo, Y., (2010), *Leader-follower formation control of underactuated autonomous underwater vehicles*, *Ocean Engineering*. **37**, 1491-1502.

5- Lawton, J. R., (2000), *A behavior-based approach to multiple spacecraft formation flying*, Citeseer.

6- Ren, W. & Sorensen, N., (2008), *Distributed coordination architecture for multi-robot formation control*, *Robotics and Autonomous Systems*. **56**, 324-333.

7- Do, K., (2011), *Practical formation control of multiple underactuated ships with limited sensing ranges*, *Robotics and Autonomous Systems*. **59**, 457-471.

8- Gazi, V., (2005), *Swarm aggregations using artificial potentials and sliding-mode control*, *Robotics, IEEE Transactions on*. **21**, 1208-1214.

9- Hu, Q., Dong, H., Zhang, Y. & Ma, G., (2015), *Tracking control of spacecraft formation flying with collision avoidance*, *Aerospace Science and Technology*. **42**, 353-364.

10- Ranjbar-Sahraei, B., Shabaninia, F., Nemati, A. & Stan, S.-D., (2012), *A novel robust decentralized adaptive fuzzy control for swarm formation of multiagent systems*, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*. **59**, 3124-3134.

11- Wang, Y., Yan, W. & Li, J., (2012), *Passivity-based formation control of autonomous underwater vehicles*, *IET control theory & applications*. **6**, 518-525.

12- Ghommam, J. & Saad, M., (2014), *Backstepping-based cooperative and adaptive tracking control design for a group of underactuated AUVs in horizontal plan*, *International Journal of Control*. **87**, 1076-1093.

13- Li, S. & Wang, X., (2013), *Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs*, *Automatica*. **49**, 3359-3367.

14- Dong, W. & Farrell, J., (2008), *Formation control of multiple underactuated surface vessels*, *IET Control Theory & Applications*. **2**, 1077-1085.

15- Ghommam, J., Calvo, O. & Rozenfeld, A., (2008), *Coordinated path following for multiple underactuated AUVs*. Paper presented at the OCEANS 2008-MTS/IEEE Kobe Techno-Ocean.

16- Peng, Z., Wang, D., Chen, Z., Hu, X. & Lan, W., (2013), *Adaptive dynamic surface control for formations of autonomous surface vehicles with uncertain dynamics*, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*. **21**, 513-520.

در نهایت با جایگذاری رابطه (۴۲)، معادله‌ی بالا به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_c \leq & + \sum_{i=1}^n \left(\frac{-k_{1i} x_{ei}^2 - k_{2i} y_{ei}^2}{\Delta_i^2} - k_{3i} \bar{\psi}_{ei}^2 \right) \\ & + \sum_{i=1}^n (-k_{4i} u_{ei}^2 - k_{5i} r_{ei}^2) + \chi^T \Gamma \\ & - \Gamma^T \mathbf{K}_1 \Gamma - \mathbf{z}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{z} \\ \Rightarrow \dot{V}_c \leq & 0 \end{aligned} \quad (74)$$

حال با توجه به اینکه V_c مثبت معین است و با توجه به رابطه (۷۴) که $\dot{V}_c \leq 0$ است اگر $X_1 = (x_{ei}, y_{ei}, \bar{\psi}_{ei}, u_{ei}, r_{ei}, \Gamma^T, \mathbf{z}^T)$ بوده و همچنین اگر ثابت $\epsilon_1 > 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که $\|X_1\| < \epsilon_1$ برای تمام $t \geq t_0$ برقرار باشد، بنابراین $X_1(t)$ در زمان $t \in [0, \infty)$ به صورت یکنواخت پیوسته است. همچنین برای اثبات پایداری مجانبی این نکته لازم به ذکر است که بدلیل $V_c(t, X_1(t))$ تابعی غیرافزایشی و از پائین کران‌دار مقدار صفر است. بنابراین هنگامی که $t \rightarrow \infty$ به آن صفر می‌شود.

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^t \dot{V}_c(\tau, X_1(\tau)) d\tau = & V_c(t_0, X_1(t_0)) \\ & - V_c(t, X_1(t)) \end{aligned} \quad (75)$$

لازم به ذکر است که از آنجا که $X_1(t)$ به صورت یکنواخت پیوسته است بنابراین $\dot{V}_c(t, X_1(t))$ موجود و محدود است و همین نتیجه را می‌توان برای $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \dot{V}_c(\tau, X_1(\tau)) d\tau$ گرفت. حال با استفاده از لم باربالات [۳۲] می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_c(\tau, X_1(\tau)) = 0$ است. همچنین با توجه به رابطه‌ی (۷۴) هنگامی که $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند، $(x_{ei}, y_{ei}, \bar{\psi}_{ei}, u_{ei}, r_{ei}, \Gamma^T, \mathbf{z}^T) \rightarrow 0$ می‌کنند. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی $\chi_i \rightarrow 0$ نتیجه‌گیری می‌شود که χ_i میل می‌کند. حال با توجه به رابطه‌ی (۴۰) و با توجه به اینکه θ_i کراندار است می‌توان نتیجه گرفت که $LS \rightarrow 0$ میل می‌کند. در نهایت مشاهده می‌شود که هنگامی $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند، $|s_i - s_j| \rightarrow 0$ و در نتیجه قضیه ۲ اثبات می‌شود.

۸ - مراجع

- 1- Park, B. S., (2015), *Adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles*, *Ocean Engineering*. **96**, 1-7.
- 2- Do, K. D., (2012), *Formation control of underactuated ships with elliptical shape*

- 17- Siegwart, R. & Nourbakhsh, I. R., (2012), *Autonomous mobile robots*, Massachusetts Institute of Technology.
- 18- Hwang, Y. K. & Ahuja, N., (1992), *Gross motion planning—a survey*, ACM Computing Surveys (CSUR). **24**, 219-291.
- 19- Kuffner, J. J. & LaValle, S. M., (2000), *RRT-connect: An efficient approach to single-query path planning*. Paper presented at the Robotics and Automation, 2000 Proceedings ICRA'00 IEEE International Conference on.
- 20- Aalbers, A., (2013), *Obstacle avoidance using limit cycles*, TU Delft, Delft University of Technology.
- 21- Li, Y., Gao, J., Su, X. & Zhao, J., (2014), *Cooperation control of multiple miniature robots in unknown obstacle environment*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers ,Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 0959651814560422.
- 22- Kim, D.-H. & Kim, J.-H., (2003), *A real-time limit-cycle navigation method for fast mobile robots and its application to robot soccer*, Robotics and Autonomous Systems. **42**, 17-30.
- 23- Soltan, R. A., Ashrafiuon, H. & Muske, K. R., (2011), *ODE-based obstacle avoidance and trajectory planning for unmanned surface vessels*, Robotica. **29**, 691-703.
- 24- Ghasemi, M., Nersesov, S. G., Clayton, G. & Ashrafiuon, H., (2014), *Sliding mode coordination control for multiagent systems with underactuated agent dynamics*, International Journal of Control. **87**, 2615-2633.
- 25- Fossen, T. I., (1994), *Guidance and control of ocean vehicles*, Wiley New York.
- 26- Rahimiyan, M., (1388), *Dynamic simulation of AUV*, Sharif university of technology. (In Persian)
- 27- Do, K. D. & Pan, J., (2009), *Control of ships and underwater vehicles: design for underactuated and nonlinear marine systems*, Springer.
- 28- Bondy, J. A. & Murty, U. S. R., (1976), *Graph theory with applications*, Macmillan London.
- 29- Do, K. D. & Pan, J., (2006), *Underactuated ships follow smooth paths with integral actions and without velocity measurements for feedback: theory and experiments*, Control Systems Technology, IEEE Transactions on. **14**, 308-322.
- 30- Do, K., (2010), *Practical control of underactuated ships*, Ocean Engineering. **37**, 1111-1119.
- 31- Ghommam, J. & Mnif, F., (2009), *Coordinated path-following control for a group of underactuated surface vessels*, Industrial Electronics, IEEE Transactions on. **56**, 3951-3963.
- 32- Khalil, H. K. & Grizzle, J., (1996), *Nonlinear systems*, Prentice hall New Jersey.