

تحلیل جریان خارجی با استفاده از تلفیق جریان لایه مرزی و جریان ایده‌آل

محمد رضا محمدی نائینی^۱

۱- مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

چکیده

در مقاله حاضر، روش تقریبی تحلیل جریان لزج و تراکم ناپذیر دو بعدی حول اجسام که دارای کاربردهای صنعتی متعدد می‌باشد، ارائه می‌گردد. هر دو جریان لایه مرزی و پتانسیل بطور تکراری حل شده و کمیت‌های مهم جریان محاسبه می‌شوند. جریان لایه مرزی آرام و مغشوش به کمک جریان مجازی عمود بر سطح جسم، بعنوان شرایط مرزی حل می‌شود. جریان حول جسم بوسیله ترکیب جریان‌های پتانسیل یکنواخت و توزیع چشمی و چاه و گردابه روی سطح جسم و گردابه با قدرت ثابت روی خط جریان جدائی ساخته شده است. جریان چرخشی در ناحیه ویک^۱ نیز ایجاد می‌شود. با توسعه برنامه محاسباتی، حل عددی صورت گرفته و قدرت و محل سینگولاریتی‌های توزیع شده محاسبه گردیده است. با معلوم بودن طول ویک و ضریب فشار کمینه از داده‌های تجربی، شکل خطوط جریان و در نتیجه لایه مرزی حول جسم بدست می‌آیند. همچنین، توزیع فشار و سرعت و منحنی خط جریان جداشده از نقطه جدائی، محاسبه شده و با داده‌های تجربی مقایسه شده اند.

کلمات کلیدی: جریان لزج، جریان پتانسیل، ویک، ضریب فشار، برنامه محاسباتی

Analysis of External Flow With Combination of Viscous Boundary Layer Flow and Ideal Flow

Abstract

In this paper, the analysis of two dimensional viscous incompressible flow around bodies with multiple industrial applications, is presented. Both of boundary layer flow and potential flow have been analysed repeatedly and in this way, the major parameters of flow are calculated. Laminar and turbulent boundary layer flow are solved with the aid of a virtual flow normal to the surface of the body as boundary conditions. The flow around the body has been made by combining the uniform potential flow and distribution of potential source and sink and vortex on the surface of body and constantly powered vortex on the separation streamline. The rotational flow in wake region is also made. With a development of computational program, the numerical method is applied in which, the power and situation of distributed singularities are obtained. Considering wake length and minimum pressure coefficient from empirical data, the shape of streamlines and consequently boundary layer around the body have been obtained. Also, distribution of pressure and velocity and curve of streamline beginning from separation point, have been calculated and compared with empirical values.

Keywords: viscous flow, potential flow, wake, pressure coefficient, computational program

^۱ -Wake

۱- مقدمه

و جریان آزاد، تقسیم می‌شود. تفاوت عمدۀ این مدلها در تحلیل ناحیه ویک و مدلسازی آن می‌باشد. در مدل اول که از نگاشت همدیس استفاده می‌نماید، روش ساده‌ای برای تعیین موقعیت خطوط جریان آزاد توسط مرجع شماره [۴] پیشنهاد شده است. در این حالت، از دو چشمۀ متقارن روی جسم در ناحیه ویک و تصویر آنها در مرکز استفاده شده است. موقعیت و قدرت این چشمۀ ها با ارضا شرایط کمکی بدست آمده و اثر ناحیه ویک به روی جریان پتانسیل توسط این چشمۀ ها اعمال می‌شود.

در این مدل از اثر لایه مرزی و جریان در ناحیه جدائی صرف‌نظر گردیده است. مدل دوم حالت خاصی از مدل سوم است. در مدل سوم فرض بر این است که ورتیسیتۀ ویک در لایه‌های برشی نازک متمرکز شده اند و ویک چرخشی با یک جفت گردا به که موقعیت آنرا قبلاً نمی‌دانیم شبیه سازی شده و حباب ویک بسته پدید می‌آید. جریان داخل این حباب، غیرلزج و چرخشی با ورتیسیتۀ ثابت فرض می‌شود. بنابر این، در این مدل دو متغیر طول حباب و ضرب فشار مبنای عنوان کمیتهای مبتنی مطرح می‌شوند. این مدلها همگی برای جریان دائم مطرح هستند، اما وقتی جریان غیر دائم باشد، گردا به‌ها از پشت جسم بطور غیر منظم جدا می‌شوند که برای مدلسازی آن در مرجع شماره [۵] روشی ارائه شده است، که در آن نیز کمیتهای آزاد وجود دارند. برای کم کردن تعداد کمیتهای آزاد می‌توان لایه مرزی را حل نمود و تعداد ورودی‌های تجربی به مدل را کم کرد.

روش مورد استفاده در این مقاله مبتنی بر حل جریان پتانسیل با لحاظ نمودن اثرات لایه مرزی (لرجه) در آن می‌باشد. در این روش با حدس و تکرار پس از حل لایه مرزی آرام و مغشوش موقعیت جدائی و ضخامت جابجایی لایه مرزی بدست می‌آید. با استفاده از یک مدل دو مولفه‌ای جریان پتانسیل، توزیع فشار حول استوانه بدست آمده و زاویه جدائی نیز محاسبه می‌شود.

جریان خارجی حول اجسام در موارد متعددی از کاربردهای صنعتی نظیر جریان حول لوله‌ها و مجراهای تبادل حرارت در مدل‌های حرارتی، پایه‌پلهای، تکیه‌گاه‌های دور از ساحل در اقیانوس‌ها، لوله‌های حاوی نفت در دریاها، دودکشها، برج‌های خنک‌کن، جریان عرضی حول خودرو، بالگرد و هواپیما و ... ظاهر می‌شود که در آنها، محاسبه نیروهای واردۀ از طرف سیال بر جسم، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

اصولاً تحلیل این مسئله به دو روش صورت می‌پذیرد، یکی با حل معادله کامل ناویراستوکس برای جریان که به حل عددی می‌انجامد و دیگری، روش‌های تقریبی که به مدل سازی جریان واقعی سیال می‌پردازند. در روش‌های تقریبی، تحلیل جریان پتانسیل انجام شده و اثر وجود لرجه و چرخش در آن، به روش‌های مختلف اعمال می‌شود. با حل جریان حول استوانه و استفاده از نگاشت همدیس^۲ می‌توان جریان حول هر جسم دیگری را بدست آورد.

از حل‌های ارائه شده برای مدلسازی جریان واقعی با استفاده از جریان پتانسیل معادل، می‌توان به کارهای ارائه شده در مرجع شماره [۱] و همچنین مرجع شماره [۲] که در آن تنها از دو ورتیسیتۀ استفاده شده و یا کارهای انجام شده در مرجع شماره [۳] که در آن لایه برشی پشت استوانه با ورتیسیتۀ های نقطه‌ای مدل شده اند، اشاره کرد. در روش معادل سازی جریان واقعی با جریان پتانسیل، رفتارهای اصلی جریان واقعی مشخص شده و تعدادی متغیر نظیر موقعیت جدائی جریان و فشار مبنای مطرح می‌شوند، که با حل مساله مقادیر دقیق آنها بدست می‌آیند. بنابراین، در روند تحلیل مساله حدس و تکرار بوجود می‌آید. می‌توان معادل سازی یاد شده را به سه گروه اصلی طبقه‌بندی نمود که عبارتند از:

مدلهای با خط جریان آزاد، مدل‌های با سینگولاریتی‌های سطحی، مدل‌های با خط جریان آزاد و استفاده از سینگولاریتی‌های سطحی و ویک. در تمام این مدل‌ها، میدان جریان به سه ناحیۀ لایه مرزی روی جسم، ویک

² - Conformal Mapping

جریان ایده‌آل و جریان لایه مرزی ارضاء می‌کنیم. بنابراین، با استفاده از کمیت ضخامت جابجایی لایه مرزی (δ°)، سرعت مجازی (V_{iw}) روی سطح استوانه بدست می‌آید. اگر این معادله بقاء، در دستگاه خط جریان دو بعدی نوشته شود و انتگرالگیری از آن در امتداد شاعع استوانه از صفر تا (δ°) انجام گیرد، رابطه (۱) برای سرعت مجازی بدست می‌آید^[۷]:

$$V_{iw} = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e u_e \delta^\circ) \quad (1)$$

در این معادله ρ_e و u_e جرم حجمی و سرعت سیال در لبه لایه مرزی بوده و δ° بصورت زیر تعریف می‌شود^[۷]:

$$\delta^\bullet = \int_0^{\delta^\circ} (1 - \rho_e u / \rho_e u_e) dn \quad (2)$$

تلفیق جریان لزج و جریان غیرلزج بدین معناست که توزیع سینگولاریتی‌ها طوری در نظر گرفته شود که جریان مجازی (V_{iw}) بدست آمده از آنها بخوبی اثر لایه مرزی در جریان پتانسیل را اعمال نماید. همچنین با مساوی قرار دادن اندازه حرکت خطی در امتداد خط جریان (S) برای جریان واقعی لزج و جریان ایده‌آل معادل و انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان (N) از صفر تا مقدار ضخامت لایه مرزی (δ) به معادله (۳) می‌رسیم.

$$\frac{d\theta}{dn} + \frac{\theta}{u_{iw}} (H + 2 - M_e^2) \frac{du_{iw}}{ds} = \frac{C_f}{2} \quad (3)$$

$$H = \frac{\delta^\bullet}{\theta}$$

که در این معادله C_f ضریب اصطکاک مجازی، θ ضخامت اندازه حرکت لایه مرزی مجازی، H ضریب شکل، M_e عدد ماخ در لبه لایه مرزی، u_{iw} سرعت مجازی روی جسم در امتداد خط جریان و S امتداد خط جریان می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند^[۷]:

۲- تلفیق دو جریان

در اعداد رینولدز بالا، لایه مرزی و جریان ایده‌آل از هم تفکیک شده بوده و بنابراین، می‌توان جریان خارجی غیرلزج را با جریان لایه مرزی تلفیق نمود. در هر تکرار و پس از حل جریان پتانسیل، از نتایج آن بعنوان شرایط مرزی در معادلات لایه مرزی استفاده شده و توزیع فشار بدست می‌آید. برای معادل سازی، کل میدان جریان را جریان ایده‌آل فرض کرده و به منظور اعمال اثر لزجت، قوانین بقاء در شکل انتگرالی، در داخل لایه مرزی و جریان ایده‌آل معادل یکسان سازی می‌شوند. با این کار، انحراف خطوط جریان در اثر وجود لزجت به جریان ایده‌آل تحمیل شده و جریان واقعی مدل می‌شود. برای انجام این امر، دو روش ضخامت جابجایی و جریان مجازی وجود دارند.^[۶]

در روش جریان مجازی، هندسه جسم را تغییر نکرده و تنها شرایط مرزی تغییر می‌یابد. در مقابل، در روش ضخامت جابجایی، هندسه جسم دائمًا در تغییر بوده و ابعاد آن در هر نقطه، به اندازه ضخامت جابجایی لایه مرزی در آن نقطه افزایش می‌یابد. از توزیع سرعت بدست آمده از مدل اصلاح شده جریان پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجایی لایه مرزی، برای بافتن حل جدید جریان لزج استفاده می‌شود. در واقع، حل تؤام و تکراری جریان لزج و جریان پتانسیل، آنقدر ادامه می‌یابد تا همگرایی حاصل شود. به منظور دست یابی به دقت بالاتر و سرعت بیشتر در حل عددی- با وجود تعداد سلول و گره کمتر- می‌توان از ضریب زیر تخفیف^۳ (W) نیز استفاده نمود. در این مقاله از روش جریان مجازی استفاده شده و وجود لایه مرزی در جریان پتانسیل با یک جریان مجازی عمود بر سطح استوانه (V_{iw}) مدل سازی شده است.

جریان پتانسیل معادل حول استوانه با استفاده از توزیع سینگولاریتی‌های گردابه و چشم و چاه روی سطح استوانه و ترکیب آن با جریان یکنواخت ورودی و همچنین ناحیه ویک، ساخته می‌شود. یکسان بودن دبی جرمی در جریان واقعی و جریان ایده‌آل معادل را با اعمال قانون بقاء جرم به شکل انتگرالی در دو

^۳-Under Relaxation

تا u_{iw} بدست آمده از حل جریان پتانسیل معادل، همگرا شود.

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_{iw} u_{iw}^2} \quad (4)$$

$$\theta = \frac{1}{\rho_{iw} u_{iw}^2} \int_0^\delta [\rho u (u_{iw} - u) + \rho_i u_i (u_i - u_{iw})] dn \quad (5)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} - \overline{\rho u' v'} \quad (6)$$

$$u = \bar{u} + u' \quad (7)$$

۳- روش ایجاد جریان واقعی
با توجه به اینکه لایه مرزی و لایه برشی آزاد به اندازه کافی نازک هستند و فرضیات زیر:

- الف- ورتیسیته در لایه برشی و لایه مرزی به ترتیب روی خط جریان آزاد خارج شده از نقطه جدائی و منحنی بدن متمرکز شده اند.
- ب- نقاط سکون دقیقاً در پائین دست نقاط جدائی روی بدن قرار دارند.

می‌توان با استفاده از توزیع چشممه و چاه روی جسم، اثر لایه مرزی قبل از نقطه جدائی را طوری در نظر گرفت که سرعت عمودی روی سطح، بصورت:

$$V(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{2u_e \delta^*}{D} \right) \quad (10)$$

وجود آید. در این معادله D بعد جسم می‌باشد. $V(\theta)$ بعد از نقطه جدائی ناچیز در نظر گرفته می‌شود. با توجه به فرضیات فوق، یک مساله نیومن^۴ بوجود می‌آید که حل آن، توسط توزیع سینگولاریتی بدست خواهد آمد. بدین منظور، با توزیع چشممه با قدرت (θ) و توزیع گردابه با قدرت (θ) روی دایره و گردابه با قدرت ثابت γ روی لایه برشی و ترکیب آنها با جریان یکنواخت با سرعت بدون بعد واحد $V_0 = 1$ ، جریان حول استوانه بدست می‌آید. توزیع چشممه، با ارضاء $V_r = V(\theta)$ روی دایره که در آن $V(\theta)$ از معادله (۱۰) بدست آمده است، حاصل می‌شود. توزیع گردابه نیز طوری تعیین می‌شود که سرعت عمودی روی دایره صفر شده و در نقطه جدائی ورتیسیته بقاء داشته باشد یعنی $\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$ که در آن $\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$ می‌باشد و پائین دست نقطه جدائی در قسمت بیرونی استوانه و اندیس d می‌باشد پائین دست نقطه جدائی در قسمت

u' و v' سرعتهای نوسانی و \bar{u} سرعت متوسط در جریان مغلوش می‌باشد. همچنین با مساوی قراردادن اندازه حرکت خطی در امتداد عمود بر خط جریان (۱) برای جریان واقعی لزج و جریان ایده آل معادل و انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان از صفر تا (δ)، معادله (۸) برای اختلاف فشار بین جریان واقعی و جریان ایده آل معادل روی دیواره بدست می‌آید:

$$\frac{P_{iw} - P_w}{\rho_{iw} u_{iw}^2} = k^* (\theta + \delta^*) \quad (8)$$

در این معادله k^* بیانگر انحنای ضخامت جابجائی بوده و با استفاده از رابطه (۹) بدست می‌آید:

$$k^* = k_w + \frac{d}{ds} \left(\frac{V_{iw}}{u_{iw}} \right) \quad (9)$$

در جریان حول استوانه چون مقادیر k^* و یا δ^* ناچیزند، می‌توان با تقریب مناسبی فشار روی دیواره در حالت واقعی (p_w) را با این فشار در حالت ایده آل معادل (p_{iw}) مساوی در نظر گرفت. در این مقاله در روند حل عددی از روش مستقیم استفاده شده است. در ابتدا V_{iw} حدس زده شده و با حل جریان پتانسیل، سرعت مماسی جدید روی سطح جسم (u_{iw}) بدست می‌آید. سپس با استفاده از آن و حل لایه مرزی و یک، سرعت در لبه لایه مرزی (u_e) محاسبه شده و V_{iw} جدید بدست می‌آید. روند حدس و تکرار ادامه می‌یابد

⁴-Neumann

مساله می‌شود. بنابراین مدل حاضر شامل دو کمیت زاویه جدائی (θ_s) و طول ویک (W_L) است. معادله پیشنهادی برای خط جریان جدا شده از نقطه جدائی عبارتست از [۶]:

$$r = (W_L - 1)(\theta - \theta_s)^2 / \theta_s^2 + 1 \quad (11)$$

شكلهای پی در پی این خط جریان در تکرارهای مختلف، از انتگرال گیری روی معادله $\psi = cte$ منشعب از نقطه جدائی با شرایط اولیه $\theta = \theta_s$ در $r = 1$ بدست می‌آید و خطوط جریان جدید تا $x = W_L$ محاسبه می‌شوند.

حدس اولیه برای W_L بین $1.5D$ تا $3D$ ، منجر به همگرائی سریعتر می‌شود. تغییر در کل هد فشاری بدون بعد (H) در عرض لایه برشی، عبارتست از:

$$\Delta H = U_i^2 - U_0^2 = C_{P_0} - C_{P_i} \quad (12)$$

$$C_{P_b} = 1 - U^2 + \Delta H \quad (13)$$

i و 0 بیانگر نواحی داخلی و خارجی لایه برشی بوده و U سرعت مماسی حول استوانه است که با سرعت جریان یکنواخت V_0 ، بدون بعد شده است و از حل جریان پتانسیل بدست می‌آید. C_{P_b} نیز ضریب فشار جریان پتانسیل با استفاده از نقطه جدائی می‌باشد. بدون بعد، بعد از نقطه جدائی می‌باشد. با توجه به آنکه $U_i = U_0 - 2\pi\gamma_s$ از معادله (۱۲) نتیجه می‌شود:

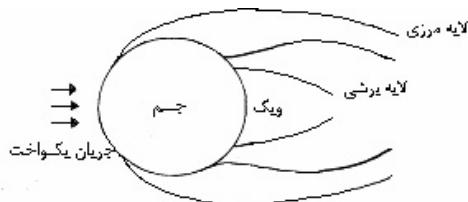
$$\Delta H = 4\pi\gamma_s(\pi\gamma_s - U_0) \quad (14)$$

معیار انتقال از لایه مرزی آرام به مغشوش (معیار میشل)^۵ [۷] بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$Re_\theta > 1.174 \left(1 + \frac{22400}{Re_x}\right) Re_x^{0.46} \quad (15)$$

برای شرایط اولیه لایه مرزی مغشوش ضخامت اندازه حرکت در نقطه گذار از آرام به مغشوش در ناحیه آرام برابر ضخامت اندازه حرکت در شروع ناحیه

داخلی استوانه می‌باشند. علاوه بر این باید سرعت مماسی در θ_d ناشی از توزیع گردابه، برابر و عکس سرعت مماسی ناشی از توزیع چشمۀ باشد. زیرا در داخل استوانه، بدليل عدم وجود نقطه منفرد سرعت سیال صفر خواهد بود. شکل زیر نمایش کلی لایه مرزی، لایه برشی و حباب ویک را ارائه می‌دهد.



شماره ۱- نمایش نواحی جریان حول استوانه

در این روش، عدد رینولدز، ضریب فشار کمینه (C_{P_m}) و زاویه جدائی (ϕ_s) بعنوان کمیت‌های ورودی در نظر گرفته می‌شوند. سپس، توزیع فشار روی سطح دایره از مدل جریان غیر چرخشی پتانسیل محاسبه می‌گردد. برای این منظور، توزیع گردابه، توزیع چشمۀ و چاه و گردابه ثابت روی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی محاسبه می‌شوند. آنگاه با استفاده از آنها، سرعت القائی در هر نقطه، سرعت روی لایه مرزی (U_e) و توزیع فشار بدست می‌آیند. سپس لایه مرزی روی استوانه برای جریان آرام و مغشوش [۷] حل شده و توزیع ضخامت جابجائی در لایه مرزی و زاویه جدائی جدید بدست می‌آید. مجدداً از حل جریان پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجائی لایه مرزی، روند تکراری تا رسیدن به همگرائی تکرار می‌شود. این همگرائی عبارتست از رسیدن ضریب فشار کمینه محاسبه شده به مقدار تجربی مطابق با عدد رینولدز.

منحنی خط جریان آزاد جدا شده از نقطه جدائی، بصورت منحنی درجه دوم $r = r(\theta)$ در نظر گرفته می‌شود. این خط باید در نقطه جدائی مماس بر دایره بوده و در فاصله محدودی از استوانه - بدليل ثابت بودن قدرت گردابه توزیع شده روی آن - تمام شود. به بیان دیگر، قدرت ورتیسیته دور از استوانه باید به سمت صفر میل نماید. بدین ترتیب، کمیت طول ویک (W_L) وارد

^۵-Michel

۴- قدرت چشم و گردابه

سرعت القاء شده چشمی ای که در نقطه p قرار دارد در نقطه t در جهت r عبارتست از:

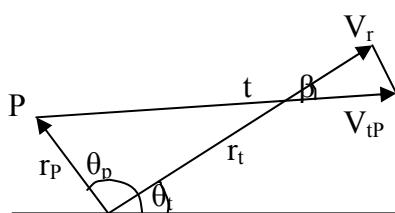
$$V_{tp} = \frac{q}{2\pi r_{tp}} \quad (20)$$

در محاسبات $\frac{q}{2\pi} = 1$ و به عبارت دیگر، چشمی با قدرت واحد ($m = 1$) فرض شده است. بر این اساس:

$$V_{tp} = \frac{1}{r_{tp}} \quad (21)$$

با توجه به شکل (۳):

$$V_r = V_{tp} \cos \beta = G(p, t) \quad (22)$$



شکل ۳- سرعت در نقطه t ناشی از چشمی در p

سرعت القاء شده در نقطه t در اثر گردابه با قدرت واحد در نقطه p در جهت θ عبارتست از:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (23)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \Rightarrow V_{tp} = \frac{-\Gamma}{2\pi r} \quad (24)$$

در محاسبات $\gamma = \frac{-\Gamma}{2\pi}$ بوده و در نتیجه:

$$V_{tp} = \frac{1}{r_{tp}} \quad (25)$$

مغوش فرض شده و از افت اندازه حرکت در این فاصله صرفنظر می‌شود.

همچنین فاکتور شکل H در ابتدای لایه مرزی مغوش بین $1/4$ تا $1/3$ در نظر گرفته می‌شود.

در لایه مرزی آرام طبق روش توایت^۶ در نقطه جدایی $\lambda_{sep} = -0.09$ و در لایه مرزی مغوش طبق روش هد^۷ $H = 2.4$ می‌باشد. بنابراین برای لایه مرزی آرام و مغوش، به ترتیب روابط (۱۶) و (۱۷) بدست می‌آیند [۷]:

$$\theta^2 = \frac{0.45\mu}{\rho U_e^6} \int_0^x U_e^5 dx \quad (16)$$

$$\frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} (U_e \theta H_1) = 0.0306(H_1 - 3) - 0.6169 \quad (17)$$

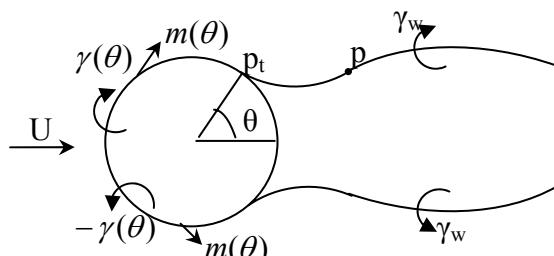
که در این روابط برای $H \leq 1.6$ بدست می‌آید:

$$H_1 = 3.3 + 0.8234(H - 1.1)^{-1.287} \quad (18)$$

و برای $H > 1.6$ بدست می‌آید:

$$H_1 = 3.3 + 1.5501(H - 0.6778)^{-3.064} \quad (19)$$

در محاسبه سینگولاریتی‌ها با توجه به شکل (۱)، صفحه محاسباتی بصورت شکل (۲) در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۲- توزیع سینگولاریتی‌ها

^۶ - Thwaite

^۷ - Head

$$\gamma(\theta_t) = \frac{\gamma_w Q(\theta_t) - \sin \theta_t}{\pi} \quad (31)$$

$$Q(\theta_t) = \int_{p_0}^{p_1} [G(p, t) - G'(p', t)] ds_p \quad (32)$$

با توجه به اینکه نقاط سکون، دقیقاً بعد از نقاط جدائی می‌باشند، لذا در نقطه جدائی (θ_d) باید سرعت مماسی ناشی از گردابه‌ها با سرعت مماس ناشی از چشم‌ها برابر و عکس هم بوده و به عبارت دیگر $U_s = -2\pi\gamma_d$. حال، با در نظر گرفتن بقاء ورتیسیته در نقطه جدائی ($\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$) نتیجه می‌شود:

$$\gamma_w = \frac{2\sin\theta_s - u_s}{2(Q_s - \pi)} \frac{Q_s}{\pi} + \frac{U_s}{2\pi} \quad (33)$$

۵- محاسبه توزیع فشار

سرعت مماسی روی استوانه در اثر وجود تمام سینگولاریتی‌ها عبارتست از:

$$U_e(\theta) = -\sin\theta + u(\theta) + \pi\gamma(\theta) + \gamma_w Q(\theta) \quad (34)$$

با قرار دادن قدرت گردابه‌ها بدست می‌آید:

$$U_e(\theta) = -2\sin\theta + u(\theta) + \frac{(u_s - 2\sin\theta_a)}{(\pi - Q_a)} Q(\theta) \quad (35)$$

در این معادله اندیس a مربوط به نقطه جدائی است و جمله اول در اثر جریان یکنواخت، جمله دوم ناشی از جایجایی لایه مرزی و جمله سوم در اثر ترکیب اثرات لایه مرزی و یک می‌باشند. پس از نوشتن معادله برنولی و اعمال شرط عدم لغزش روی سطح استوانه و بدون بعد کردن سرعتها با استفاده از U_∞ ، ضریب فشار بدست می‌آید:

$$C_P(\theta) = 1 - U_e^2(\theta) \quad (36)$$

$$V_\theta = V_{tp} \cos \beta = G(p, t) \quad (26)$$

اگر $V(\theta_t)$ را سرعت مجازی برای به حساب آوردن لایه مرزی در جریان پتانسیل در نظر بگیریم، آنگاه سرعت عمودی ناشی از تمام چشم‌های موجود روی دایره در نقطه t باید در شرط مرزی

$$r = 1 \quad V_r = V(\theta_t)$$

صدق کند بنابراین:

(27)

$$\pi m(\theta_t) + \int_0^{2\pi} m(\theta_q) G(q, t) d\theta_q = V(\theta_t)$$

چون نقاط q و t روی دایره می‌باشند $G(q, t) = 0$ و بدليل تقارن در توزیع چشم‌های قدرت توزیع چشم‌های با استفاده از رابطه (28) بدست می‌آید:

$$m(\theta_t) = \frac{V(\theta_t) - \bar{V}/2}{\pi} \quad (28)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(\theta) d\theta \quad (29)$$

سرعت مماسی ناشی از جریان یکنواخت و گردابه‌های توزیع شده روی دایره و روی خط جریان آزاد، در نقطه t (نقطه‌ای روی دایره) باید در شرط مرزی $V(\theta) = 0$ روی سطح استوانه و درون آن صدق کند. زیرا داخل دایره نقطه منفردی وجود نداشته و بنابراین نباید جریانی داخل دایره وجود داشته باشد.

بدین ترتیب:

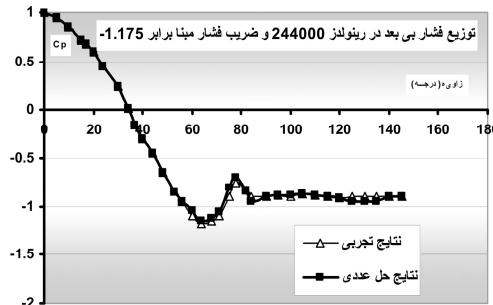
$$\pi\gamma(t) - \sin\theta_t + \int_{p_0}^{p_1} \gamma(p) [G(p, t) - G'(p', t)] ds_p = 0 \quad (30)$$

$$\pi\gamma(t) - \sin\theta_t + \int_{p_0}^{p_1} \gamma(p) [G(p, t) - G'(p', t)] ds_p = 0 \quad (30)$$

با توجه به این رابطه، با ثابت بودن قدرت گردابه از تا p_1 برابر γ_w ، توزیع قدرت گردابه روی استوانه بدست می‌آید:

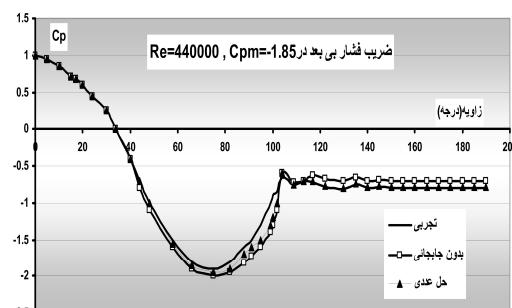
شکل های (۴) و (۵) و (۶) نمایش داده شده است. با توجه به این شکل ها می توان نتایج را با مقادیر تجربی مقایسه نمود. نتایج با داده های تجربی تطابق مناسبی را نشان می دهند.

در شکل (۴) توزیع فشار بدون بعد در جریان آرام برای عدد رینولدز ۲۴۴۰۰۰ رسم گردیده است.



شکل ۴- توزیع فشار بی بعد برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰

با افزایش عدد رینولدز، در حدود رینولدز ۴۲۰۰۰ میدان جریان از حالت آرام به مغشوش تبدیل می شود [۷]. برای جریان مغشوش که لایه مرزی از دو قسمت آرام و مغشوش تشکیل شده است، عنوان نمونه شکل های (۵) و (۶) برای اعداد رینولدز ۴۴۰۰۰ و ۴۲۸۰۰۰ رسم گردیده است.



شکل ۵- توزیع فشار بی بعد برای رینولدز ۴۴۰۰۰۰

کمیت طول ویک حدود $2.3D$ در نظر گرفته می شود. برای بدست آوردن معادله خط جریان جدا شده از نقطه جدائی، باید شرط عدم تغییرتابع جریان در طول خط جریان را اعمال نمائیم:

$$d\psi_{sep} = -u_\theta dr + ru_r d\theta = 0 \quad (37)$$

معادله (۱۱) بعنوان حدس اول برای منحنی خط جریان آزاد جدا شده از نقطه جدائی در نظر گرفته شده و در تکرارهای بعدی معادله این خط جریان بدست می آید:

$$r_{i+1} = r_i \exp[(\overline{u_r / u_\theta})(\theta_{i+1} - \theta_i)] \quad (38)$$

$\overline{u_r / u_\theta}$ متوسط مقادیر بین دو گره مجاور بوده و θ از θ_0 تا θ_{sep} با تقسیمات مساوی تغییر می کند. در هر تکرار پس از محاسبه U_e ، از آن بعنوان رودی برای محاسبات لایه مرزی استفاده می شود. با محاسبه $^{\delta}$ و سپس $V(\theta)$ ، با یافتن توزیع گردابه ها و چشممه های جدید، روند حل عددی تا همگرائی به منظور حصول شرایط بهینه از نظر تعداد گره ها و دقت و زمان لازم برای محاسبه در هر تکرار ادامه می یابد. به منظور همگرائی سریع و دقیق، از ضریب زیر تخفیف $w = 0.8$ در هر تکرار برای تقریب مقادیر کمیتها طبق معادله (۳۹) استفاده می شود.

$$a^{k+1} = a^k + w(a^{k+1} - a^k) \quad (39)$$

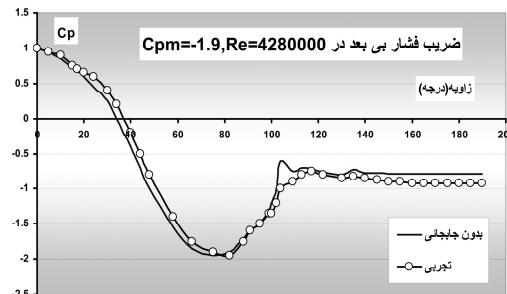
۶- نتایج

مدلسازی عددی جریان با توجه به عدد رینولدز (جریان آرام و مغشوش) و ضریب فشار کمینه تجربی به عنوان مقادیر ورودی، انجام گرفته و طول ویک، زاویه جدائی و ضریب فشار حول استوانه بدست آمده است. منحنی توزیع فشار بدون بعد (ضریب فشار C_p) روی سطح استوانه بر حسب زاویه از نقطه سکون، در

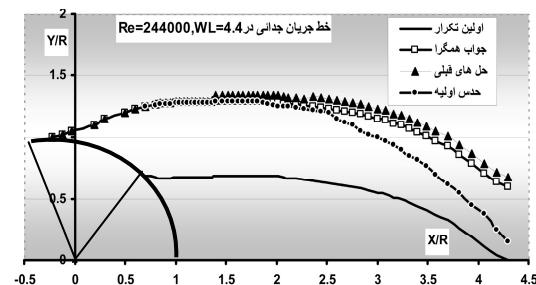
⁸ - Under Relaxation

لایه مرزی و متاثر شدن میدان جریان از وجود استوانه می‌باشد. سپس تا نقطه جدائی افزایش یافته و پس از نقطه جدائی در مقدار ثابتی کوچکتر از یک باقی می‌ماند. نتایج بدست آمده بر اساس این شکل‌ها، انطباق خوبی با داده‌های تجربی را نشان می‌دهند اما در نزدیک نقطه جدائی اختلاف حدود ۵ درصد را نشان می‌دهد. علت این اختلاف در نزدیک نقطه جدائی، خطای است که در روش‌های تقریبی حل لایه مرزی (روش‌های توابیت^۹ و هد^{۱۰}) در محاسبه ضخامت لایه مرزی وجود دارد.

شکل (۴) برای جریان آرام انطباق بسیار خوبی بین داده‌های تجربی و نتایج حل عددی را نشان می‌دهد. در این رینولدز زاویه جدائی ۷۸ درجه می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز و تبدیل میدان جریان از حالت آرام به مغشوش (شکل‌های (۵) و (۶)), زاویه جدائی به تدریج افزایش یافته و از حدود ۷۸ درجه به ۱۰۵ درجه رسیده و طول ویک نیز افزایش را نشان می‌دهد. این امر بدلیل اندازه حرکت خطی بیشتر جریان مغشوش نسبت به جریان آرام می‌باشد. به عبارت دیگر با افزایش رینولدز، طول ویک وسعت بیشتری پیداکرده و وجود استوانه در طول بیشتری از میدان جریان ایجاد اغتشاش می‌کند. در این حالت با وجود افزایش زاویه جدائی، فاصله بین دو نقطه جدائی بالا و پائین کمتر شده و ناحیه ویک محدوده کمتری را اشغال می‌کند. بنابر این اختلاف فشار بین جلو و پشت استوانه که ناشی از محدوده وسیع ناحیه ویک در حالت آرام بود و باعث نیروی درگ^{۱۱} فشاری قابل ملاحظه‌ای می‌شد، در حالت مغشوش کم شده و نیروی درگ وارد بر استوانه به شدت کاهش می‌یابد. علت این امر، اندازه حرکت خطی زیاد جریان مغشوش است که باعث می‌شود خطوط جریان شکل منطبق بر بدنه^{۱۲} خود را حفظ نمایند و فشار معکوس روی استوانه کاهش یابد. به همین دلیل بازیابی فشار در پشت استوانه در جریان مغشوش بیشتر از جریان آرام بوده و مقدار ضریب فشار

⁹-Thwaite¹⁰-Head¹¹-Drag force¹²-Streamliningشکل ۶- C_p با رینولدز ۴۲۸۰۰۰۰ بدون جریان مجازی

بعنوان نمونه منحنی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی بصورت حدس اولیه و نهائی در شکل (۷) برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰ (جریان آرام) در زاویه جدائی ۷۸ درجه رسم گردیده است.



شکل ۷- خط جریان جدائی برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰

در جدول (۱) نتایج محاسبات بصورت ضریب فشار کمینه (C_{p_m}) و همچنین مقدار تجربی آن، مقدار درصد خطا در محاسبه ضریب فشار کمینه، کمیت طول ویک (W_L), زاویه جدائی جریان (θ_{sep}), قدرت گردابه ثابت روی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی (γ_w) و قدرت گردابه در نقطه جدائی (γ_s), برای اعداد رینولدز مختلف در حالت آرام و مغشوش، ارائه گردیده است.

۷- نتیجه گیری

طبق شکل‌های (۴) و (۵) و (۶)، ضریب فشار بدون بعد در نقطه سکون در تمام رینولدزها واحد می‌باشد و با حرکت روی سطح استوانه، روند کاهشی را تا مقدار کمینه خود نشان می‌دهد که بدلیل رشد ضخامت

طبق شکل (۷)، مشاهده می‌شود که در جریان آرام برای رینولدز ۲۴۴۰۰، موقعیت خط جریان از مقدار حدس اولیه ۱۲۵ درجه به مقدار ۷۸ درجه پس از همگرائی روش حل عددی رسیده است. حدس اولیه از زاویه ۱۲۵ درجه شروع شده و پس از همگرائی زاویه جدائی در ۷۸ درجه نیز رسم شده و سپس به منحنی نهائی رسیده است.

جدول (۱) نشان می‌دهد که روند تغییرات γ_s و γ_w با افزایش رینولدز از نظر قدر مطلق کاهشی است. همچنین ملاحظه می‌شود که Cp_m با افزایش رینولدز، کاهش یافته و با رسیدن جریان به حالت مشوش آهنگ کاهش سرعتی را به خود می‌گیرد. درصد خطا در محاسبه Cp_m نیز در جریان مشوش بیشتر از جریان آرام است اما به ۳ درصد نمی‌رسد. مشوش شدن جریان اثر چشمگیری روی افزایش کند طول ویک W_L ندارد. زاویه جدائی نیز به شدت تابع نوع جریان بوده و تغییرات زیادی را نشان می‌دهد.

مبدأ (Cp_b) در جریان مشوش بزرگتر از جریان آرام است.

شکل (۵) در جریان لایه مرزی مشوش با رینولدز ۴۴۰۰۰، یکبار با در نظر گرفتن اثر ضخامت جابجایی لایه مرزی در روند حل عددی و بار دیگر بدون آن ضریب فشار را نمایش می‌دهد. از این شکل ملاحظه می‌شود که مدل سازی جریان، بدون در نظر گرفتن ضخامت جابجایی لایه مرزی در اعداد رینولدز متوسط، خطای قابل ملاحظه‌ای را در بر دارد. زاویه جدائی جریان نیز از حدود ۸۰ درجه برای جریان آرام به حدود ۱۰۵ درجه برای جریان مشوش رسیده است.

نتایج بدست آمده از توزیع فشار در شکل (۶) نشان می‌دهد که برای رینولدز ۴۲۸۰۰۰ اگر از اثر ضخامت جابجایی لایه مرزی صرف نظر کنیم خطای بسیار اندکی بوجود آمده و با دقت مناسبی می‌توان از جریان مجازی در رینولدزهای بالا صرف نظر نمود. همچنین در تمام منحنی‌ها، ضریب فشار پس از نقطه جدائی (Cp_b) در مقدار ثابتی باقی می‌ماند، زیرا جریان در ناحیه ویک حالت تصادفی داشته و احتمال وجود سیال و ایجاد فشار آن روی سطح استوانه در همه جا یکسان است.

جدول ۱- نتایج عددی

Re	$C_{pm}(\text{exp})$	C_{pm}	Deviation (%)	w_L	θ_{sep}	γ_w	γ_s
۱۰۱۰۰۰	-۱/۳۲	-۱/۳۱۹۷	۰/۰۲۳	۴	۸۰	-۰/۲۱۴۶	-۰/۲۱۹۸۴
۲۰۷۰۰۰	-۱/۰۸	-۱/۰۷۴	۰/۵۵	۴,۲	۷۶	-۰/۲۱۲	۰/۲۱۱۳۵
۲۴۴۰۰۰	-۱/۱۸	-۱/۱۷۵	۰/۴۲	۴,۴	۷۸	-۰/۲۰۶۹	-۰/۲۰۸۶۹
۳۲۳۰۰۰	-۱/۲۴	-۱/۲۱	۲/۲۴	۴,۸	۸۴	-۰/۲۰۰۳۵	-۰/۲۰۰۴
۴۲۸۰۰۰	-۱/۹	-۱/۸۵	۲/۶۳	۴,۹	۱۰۵	-۰/۱۷۸۵۹	-۰/۱۷۷۸
۴۴۰۰۰۰	-۱/۹۲	-۱/۸۸	۲/۰۸	۴,۹۲	۱۰۶	-۰/۱۷۸۲۹	-۰/۱۷۷۵
۴۲۸۰۰۰	-۱/۹۵	-۱/۹	۲/۶۵	۵,۶	۱۰۹	-۰/۱۶۵۹۷	-۰/۱۶۵۷۵

- مراجع

- 4-Parkinson and Jandali, A Wake Source model for bluff body Potential flow, J.Fluid Mech, Vol 40, PP 577 – 594, 2002.
- 5-F.D.Deffenbaugh, Time Development of Flow about an Impulsively Started Cylinder, AIAA.J, Vol. 14, no. 7, PP 908 – 913.
- 6-Celik and pated and Landweber, Calculation Mean Flow Past circular Cylinders by Viscous Inviscid Interaction, J. Fluids Engineering, Vol.107, PP 218 – 223 , 2004.
- 7-White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 1995.
- 1-R.B. Payne, Calculation of unsteady Viscous flow Past a circular Cylinder, J.Fluid. Mechanics, Vol. 4, 1957.
- 2-A.E.Bryson, Symmetric Vortex Separation on Circular Cylinders, J. Applied Mechanics, PP 643-646, 1959.
- 3-Sarpkaya, Inviscid Model of two - Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder, AIAA.J, Vol. 17, No. 11, PP 1193 - 1200.