

## تحلیل جریان خارجی با استفاده از تلفیق جریان لایه مرزی و جریان ایده آل

محمد رضا محمدی نائینی<sup>۱</sup>

۱- مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

### چکیده

در مقاله حاضر، روش تقریبی تحلیل جریان لزج و تراکم ناپذیر دو بعدی حول اجسام که دارای کاربردهای صنعتی متعدد می باشد، ارائه می گردد. هر دو جریان لایه مرزی و پتانسیل بطور تکراری حل شده و کمیت های مهم جریان محاسبه می شوند. جریان لایه مرزی آرام و مغشوش به کمک جریان مجازی عمود بر سطح جسم، بعنوان شرایط مرزی حل میشود. جریان حول جسم بوسیله ترکیب جریان های پتانسیل یکنواخت و توزیع چشمه و چاه و گردابه روی سطح جسم و گردابه با قدرت ثابت روی خط جریان جدائی ساخته شده است. جریان چرخشی در ناحیه ویک<sup>۱</sup> نیز ایجاد می شود. باتوسعه برنامه محاسباتی، حل عددی صورت گرفته و قدرت و محل سینگولاریته های توزیع شده محاسبه گردیده است. با معلوم بودن طول ویک و ضریب فشار کمینه از داده های تجربی، شکل خطوط جریان و در نتیجه لایه مرزی حول جسم بدست می آیند. همچنین، توزیع فشار و سرعت و منحنی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی، محاسبه شده و با داده های تجربی مقایسه شده اند.

کلمات کلیدی: جریان لزج، جریان پتانسیل، ویک، ضریب فشار، برنامه محاسباتی

## Analysis of External Flow With Combination of Viscous Boundary Layer Flow and Ideal Flow

### Abstract

In this paper, the analysis of two dimensional viscous incompressible flow around bodies with multiple industrial applications, is presented. Both of boundary layer flow and potential flow have been analysed repeatedly and in this way, the major parameters of flow are calculated. Laminar and turbulent boundary layer flow are solved with the aid of an virtual flow normal to the surface of the body as boundary conditions. The flow around the body has been made by combining the uniform potential flow and distribution of potential source and sink and vortex on the surface of body and constantly powered vortex on the separation streamline. The rotational flow in wake region is also made. With a development of computational program, the numerical method is applied in which, the power and situation of distributed singularities are obtained. Considering wake length and minimum pressure coefficient from empirical data, the shape of streamlines and consequently boundary layer around the body have been obtained. Also, distribution of pressure and velocity and curve of streamline beginning from separation point, have been calculated and compared with empirical values.

**Keywords:** viscous flow, potential flow, wake, pressure coefficient, computational program

<sup>۱</sup> -Wake

## ۱- مقدمه

جریان خارجی حول اجسام در موارد متعددی از کاربردهای صنعتی نظیر جریان حول لوله ها و مجراهای تبادل حرارت در مبدل‌های حرارتی، پایه پلها، تکیه گاههای دور از ساحل در اقیانوسها، لوله های حاوی نفت در دریاها، دودکشها، برجهای خنک کن، جریان عرضی حول خودرو، بالگرد و هواپیما و ... ظاهر می شود که در آنها، محاسبه نیروهای وارده از طرف سیال بر جسم، از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشد.

اصولاً تحلیل این مسئله به دو روش صورت می پذیرد، یکی با حل معادله کامل ناویراستوکس برای جریان که به حل عددی می انجامد و دیگری، روشهای تقریبی که به مدل سازی جریان واقعی سیال می پردازند. در روشهای تقریبی، تحلیل جریان پتانسیل انجام شده و اثر وجود لزجت و چرخش در آن، به روش های مختلف اعمال می شود. با حل جریان حول استوانه و استفاده از نگاشت همدیس<sup>۲</sup> می توان جریان حول هر جسم دیگری را بدست آورد.

از حل‌های ارائه شده برای مدلسازی جریان واقعی با استفاده از جریان پتانسیل معادل، می توان به کارهای ارائه شده در مرجع شماره [۱] و همچنین مرجع شماره [۲] که در آن تنها از دو ورتیسیتته استفاده شده و یا کارهای انجام شده در مرجع شماره [۳] که در آن لایه برشی پشت استوانه با ورتیسیتته های نقطه ای مدل شده اند، اشاره کرد. در روش معادل سازی جریان واقعی با جریان پتانسیل، رفتارهای اصلی جریان واقعی مشخص شده و تعدادی متغیر نظیر موقعیت جدائی جریان و فشار مینا، مطرح می شوند، که با حل مساله مقادیر دقیق آنها بدست می آیند. بنابراین، در روند تحلیل مساله حدس و تکرار بوجود می آید. می توان معادل سازی یاد شده را به سه گروه اصلی طبقه بندی نمود که عبارتند از:

مدلهای با خط جریان آزاد، مدل‌های با سینگولاریته‌های سطحی، مدل‌های با خط جریان آزاد و استفاده از سینگولاریته های سطحی و ویک. در تمام این مدل‌ها، میدان جریان به سه ناحیه لایه مرزی روی جسم، ویک

و جریان آزاد، تقسیم می شود. تفاوت عمده این مدل‌ها در تحلیل ناحیه ویک و مدلسازی آن می باشد. در مدل اول که از نگاشت همدیس استفاده می نماید، روش ساده ای برای تعیین موقعیت خطوط جریان آزاد توسط مرجع شماره [۴] پیشنهاد شده است. در این حالت، از دو چشمه متقارن روی جسم در ناحیه ویک و تصویر آنها در مرکز استفاده شده است. موقعیت و قدرت این چشمه ها با ارضاء شرایط کمکی بدست آمده و اثر ناحیه ویک به روی جریان پتانسیل توسط این چشمه‌ها اعمال می شود.

در این مدل از اثر لایه مرزی و جریان در ناحیه جدائی صرف نظر گردیده است. مدل دوم حالت خاصی از مدل سوم است. در مدل سوم فرض بر این است که ورتیسیتته ویک در لایه های برشی نازک متمرکز شده اند و ویک چرخشی با یک جفت گردابه که موقعیت آنرا قبلاً نمی دانیم شبیه سازی شده و حباب ویک بسته پدید می آید. جریان داخل این حباب، غیرلزج و چرخشی با ورتیسیتته ثابت فرض می شود. بنابر این، در این مدل دو متغیر طول حباب و ضریب فشار مینا بعنوان کمیت‌های مینا مطرح می شوند. این مدل‌ها همگی برای جریان دائم مطرح هستند، اما وقتی جریان غیر دائم باشد، گردابه‌ها از پشت جسم بطور غیر منظم جدا می شوند که برای مدلسازی آن در مرجع شماره [۵] روشی ارائه شده است، که در آن نیز کمیت‌های آزاد وجود دارند. برای کم کردن تعداد کمیت‌های آزاد می توان لایه مرزی را حل نمود و تعداد ورودی‌های تجربی به مدل را کم کرد.

روش مورد استفاده در این مقاله مبتنی بر حل جریان پتانسیل با لحاظ نمودن اثرات لایه مرزی (لزجت) در آن می باشد. در این روش با حدس و تکرار پس از حل لایه مرزی آرام و مغشوش موقعیت جدائی و ضخامت جابجائی لایه مرزی بدست می آید. با استفاده از یک مدل دو مولفه‌ای جریان پتانسیل، توزیع فشار حول استوانه بدست آمده و زاویه جدائی نیز محاسبه می شود.

<sup>2</sup> - Conformal Mapping

## ۲- تلفیق دو جریان

جریان ایده آل و جریان لایه مرزی ارضاء می کنیم. بنابراین، با استفاده از کمیت ضخامت جابجائی لایه مرزی ( $\delta^*$ )، سرعت مجازی ( $V_{iw}$ ) روی سطح استوانه بدست می آید. اگر این معادله بقاء، در دستگاه خط جریان دو بعدی نوشته شود و انتگرالگیری از آن در امتداد شعاع استوانه از صفر تا ( $\delta^*$ ) انجام گیرد، رابطه (۱) برای سرعت مجازی بدست می آید [۷]:

$$V_{iw} = \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} (\rho_e u_e \delta^*) \quad (1)$$

در این معادله  $\rho_e$  و  $u_e$  جرم حجمی و سرعت سیال در لبه لایه مرزی بوده و  $\delta^*$  بصورت زیر تعریف می شود [۷]:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} (1 - \rho u / \rho_e u_e) dn \quad (2)$$

تلفیق جریان لزج و جریان غیرلزج بدین معناست که توزیع سینگولاریتی ها طوری در نظر گرفته شود که جریان مجازی ( $V_{iw}$ ) بدست آمده از آنها بخوبی اثر لایه مرزی در جریان پتانسیل را اعمال نماید. همچنین با مساوی قرار دادن اندازه حرکت خطی در امتداد خط جریان ( $S$ ) برای جریان واقعی لزج و جریان ایده آل معادل و انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان ( $n$ ) از صفر تا مقدار ضخامت لایه مرزی ( $\delta$ ) به معادله (۳) می رسیم.

$$\frac{d\theta}{dn} + \frac{\theta}{u_{iw}} (H + 2 - M_e^2) \frac{du_{iw}}{ds} = \frac{C_f}{2} \quad (3)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

که در این معادله  $C_f$  ضریب اصطکاک مجازی،  $\theta$  ضخامت اندازه حرکت لایه مرزی مجازی،  $H$  ضریب شکل،  $M_e$  عدد ماخ در لبه لایه مرزی،  $u_{iw}$  سرعت مجازی روی جسم در امتداد خط جریان و  $S$  امتداد خط جریان می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند [۷]:

در اعداد رینولدز بالا، لایه مرزی و جریان ایده آل از هم تفکیک شده بوده و بنابراین، می توان جریان خارجی غیرلزج را با جریان لایه مرزی تلفیق نمود. در هر تکرار و پس از حل جریان پتانسیل، از نتایج آن بعنوان شرایط مرزی در معادلات لایه مرزی استفاده شده و توزیع فشار بدست می آید. برای معادل سازی، کل میدان جریان را جریان ایده آل فرض کرده و به منظور اعمال اثر لزجت، قوانین بقاء در شکل انتگرالی، در داخل لایه مرزی و جریان ایده آل معادل یکسان سازی می شوند. با این کار، انحراف خطوط جریان در اثر وجود لزجت به جریان ایده آل تحمیل شده و جریان واقعی مدل می شود. برای انجام این امر، دو روش ضخامت جابجائی و جریان مجازی وجود دارند. [۶]

در روش جریان مجازی، هندسه جسم را تغییر نکرده و تنها شرایط مرزی تغییر می یابد. در مقابل، در روش ضخامت جابجائی، هندسه جسم دائماً در تغییر بوده و ابعاد آن در هر نقطه، به اندازه ضخامت جابجائی لایه مرزی در آن نقطه افزایش می یابد. از توزیع سرعت بدست آمده از مدل اصلاح شده جریان پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجائی لایه مرزی، برای یافتن حل جدید جریان لزج استفاده می شود. در واقع، حل توأم و تکراری جریان لزج و جریان پتانسیل، آنقدر ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود. به منظور دست یابی به دقت بالاتر و سرعت بیشتر در حل عددی- با وجود تعداد سلول و گره کمتر- می توان از ضریب زیر تخفیف<sup>۳</sup> ( $W$ ) نیز استفاده نمود. در این مقاله از روش جریان مجازی استفاده شده و وجود لایه مرزی در جریان پتانسیل با یک جریان مجازی عمود بر سطح استوانه ( $V_{iw}$ ) مدل سازی شده است.

جریان پتانسیل معادل حول استوانه با استفاده از توزیع سینگولاریتی های گردابه و چشمه و چاه روی سطح استوانه و ترکیب آن با جریان یکنواخت ورودی و همچنین ناحیه ویک، ساخته می شود. یکسان بودن دبی جرمی در جریان واقعی و جریان ایده آل معادل را با اعمال قانون بقاء جرم به شکل انتگرالی در دو

<sup>3</sup> -Under Relaxation

تا  $u_{iw}$  بدست آمده از حل جریان پتانسیل معادل، همگرا شود.

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_{iw} u_{iw}^2} \quad (4)$$

### ۳- روش ایجاد جریان واقعی

با توجه به اینکه لایه مرزی و لایه برشی آزاد به اندازه کافی نازک هستند و فرضیات زیر:

$$\theta = \frac{1}{\rho_{iw} u_{iw}^2} \int_0^\delta [\rho u (u_{iw} - u) + \rho_i u_i (u_i - u_{iw})] dn \quad (5)$$

الف- رتیسیتته در لایه برشی و لایه مرزی به ترتیب روی خط جریان آزاد خارج شده از نقطه جدائی و منحنی بدنه متمرکز شده اند.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} - \overline{\rho u' v'} \quad (6)$$

$$u = \bar{u} + u' \quad (7)$$

ب- نقاط سکون دقیقاً در پائین دست نقاط جدائی روی بدنه قرار دارند.

$u'$  و  $v'$  سرعتهای نوسانی و  $\bar{u}$  سرعت متوسط در جریان مغشوش می باشد. همچنین با مساوی قرار دادن اندازه حرکت خطی در امتداد عمود بر خط جریان برای جریان واقعی لزج و جریان ایده آل معادل و انتگرال گیری در امتداد عمود بر خط جریان از صفر تا  $(\delta)$ ، معادله (۸) برای اختلاف فشار بین جریان واقعی و جریان ایده آل معادل روی دیواره بدست می آید:

$$V(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{2u_e \delta^*}{D} \right) \quad (10)$$

$$\frac{P_{iw} - P_w}{\rho_{iw} u_{iw}^2} = k^* (\theta + \delta^*) \quad (8)$$

بوجود آید. در این معادله  $D$  بعد جسم می باشد.  $V(\theta)$  بعد از نقطه جدائی ناچیز در نظر گرفته می شود. با توجه به فرضیات فوق، یک مساله نیومن<sup>۴</sup> بوجود می آید که حل آن، توسط توزیع سینگلاریتی بدست خواهد آمد. بدین منظور، با توزیع چشمه با قدرت  $m(\theta)$  و توزیع گردابه با قدرت  $\gamma(\theta)$  روی دایره و گردابه با قدرت ثابت  $\gamma_w$  روی لایه برشی و ترکیب آنها با جریان یکنواخت با سرعت بدون بعد واحد  $V_0 = 1$ ، جریان حول استوانه بدست می آید. توزیع چشمه، با ارضاء  $V_r = V(\theta)$  روی دایره که در آن  $V(\theta)$  از معادله (۱۰) بدست آمده است، حاصل می شود. توزیع گردابه نیز طوری تعیین می شود که سرعت عمودی روی دایره صفر شده و در نقطه جدائی رتیسیتته بقاء داشته باشد یعنی  $\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$  که در آن  $s$  و  $w$  مبین بالا دست و پائین دست نقطه جدائی در قسمت بیرونی استوانه و اندیس  $d$  مبین پائین دست نقطه جدائی در قسمت

در این معادله  $k^*$  بیانگر انحناء ضخامت جابجائی بوده و با استفاده از رابطه (۹) بدست می آید:

$$k^* = k_w + \frac{d}{ds} \left( \frac{V_{iw}}{u_{iw}} \right) \quad (9)$$

در جریان حول استوانه چون مقادیر  $k^*$  و  $\theta + \delta^*$  ناچیزند، می توان با تقریب مناسبی فشار روی دیواره در حالت واقعی ( $p_w$ ) را با این فشار در حالت ایده آل معادل ( $p_{iw}$ ) مساوی در نظر گرفت. در این مقاله در روند حل عددی از روش مستقیم استفاده شده است. در ابتدا  $V_{iw}$  حدس زده شده و با حل جریان پتانسیل، سرعت مماسی جدید روی سطح جسم ( $u_{iw}$ ) بدست می آید. سپس با استفاده از آن و حل لایه مرزی و ویک، سرعت در لایه مرزی ( $u_e$ ) محاسبه شده و  $V_{iw}$  جدید بدست می آید. روند حدس و تکرار ادامه می یابد

<sup>4</sup>-Neumann

مساله می شود. بنابراین مدل حاضر شامل دو کمیت زاویه جدائی ( $\theta_s$ ) و طول ویک ( $W_L$ ) است. معادله پیشنهادی برای خط جریان جدا شده از نقطه جدائی عبارتست از [۶]:

$$r = (W_L - 1)(\theta - \theta_s)^2 / \theta_s^2 + 1 \quad (11)$$

شکلهای پی در پی این خط جریان در تکرارهای مختلف، از انتگرال گیری روی معادله  $\psi = cte$  منشعب از نقطه جدائی با شرایط اولیه  $\theta = \theta_s$  در  $r = 1$  بدست می آید و خطوط جریان جدید تا  $x = W_L$  محاسبه می شوند.

حداکثر اولیه برای  $W_L$  بین  $1.5D$  تا  $3D$ ، منجر به همگرایی سریعتر می شود. تغییر در کل هد فشاری بدون بعد ( $H$ ) در عرض لایه برشی، عبارتست از:

$$\Delta H = U_i^2 - U_0^2 = C_{P_0} - C_{P_i} \quad (12)$$

$$C_{P_0} = 1 - U^2 + \Delta H \quad (13)$$

$i$  و  $0$  بیانگر نواحی داخلی و خارجی لایه برشی بوده و  $U$  سرعت مماسی حول استوانه است که با سرعت جریان یکنواخت  $V_0$ ، بدون بعد شده است و از حل جریان پتانسیل بدست می آید.  $C_{P_0}$  نیز ضریب فشار بدون بعد، بعد از نقطه جدائی می باشد. با توجه به آنکه  $2\pi\gamma_s = U_0 - U_i$  از معادله (۱۲) نتیجه می شود:

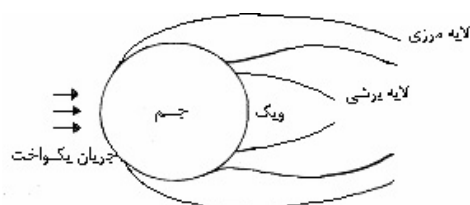
$$\Delta H = 4\pi\gamma_s(\pi\gamma_s - U_0) \quad (14)$$

معیار انتقال از لایه مرزی آرام به مغشوش (معیار میشل)<sup>۵</sup> [۷] بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\text{Re}_\theta > 1.174(1 + \frac{22400}{\text{Re}_x}) \text{Re}_x^{0.46} \quad (15)$$

برای شرایط اولیه لایه مرزی مغشوش ضخامت اندازه حرکت در نقطه گذار از آرام به مغشوش در ناحیه آرام برابر ضخامت اندازه حرکت در شروع ناحیه

داخلی استوانه می باشند. علاوه بر این باید سرعت مماسی در  $\theta_d$  ناشی از توزیع گردابه، برابر و عکس سرعت مماسی ناشی از توزیع چشمه باشد. زیرا در داخل استوانه، بدلیل عدم وجود نقطه منفرد سرعت سیال صفر خواهد بود. شکل زیر نمایش کلی لایه مرزی، لایه برشی و حباب ویک را ارائه می دهد.



شماره ۱ - نمایش نواحی جریان حول استوانه

در این روش، عدد رینولدز، ضریب فشار کمینه ( $C_{P_{min}}$ ) و زاویه جدائی ( $\phi_s$ ) بعنوان کمیت های ورودی در نظر گرفته می شوند. سپس، توزیع فشار روی سطح دایره از مدل جریان غیر چرخشی پتانسیل محاسبه می گردد. برای این منظور، توزیع گردابه، توزیع چشمه و چاه و گردابه ثابت روی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی محاسبه می شوند. آنگاه با استفاده از آنها، سرعت القائی در هر نقطه، سرعت روی لایه مرزی ( $U_e$ ) و توزیع فشار بدست می آیند. سپس لایه مرزی روی استوانه برای جریان آرام و مغشوش [۷] حل شده و توزیع ضخامت جابجائی در لایه مرزی و زاویه جدائی جدید بدست می آید. مجدداً از حل جریان پتانسیل با استفاده از ضخامت جابجائی لایه مرزی، روند تکراری تا رسیدن به همگرایی تکرار می شود. این همگرایی عبارتست از رسیدن ضریب فشار کمینه محاسبه شده به مقدار تجربی مطابق با عدد رینولدز.

منحنی خط جریان آزاد جدا شده از نقطه جدائی، بصورت منحنی درجه دوم  $r = r(\theta)$  در نظر گرفته می شود. این خط باید در نقطه جدائی مماس بر دایره بوده و در فاصله محدودی از استوانه - بدلیل ثابت بودن قدرت گردابه توزیع شده روی آن - تمام شود. به بیان دیگر، قدرت ورتیسیته دور از استوانه باید به سمت صفر میل نماید. بدین ترتیب، کمیت طول ویک ( $W_L$ ) وارد

<sup>5</sup>-Michel

## ۴- قدرت چشمه و گردابه

سرعت القاء شده چشمه ای که در نقطه  $p$  قرار دارد در نقطه  $t$  در جهت  $r$  عبارتست از:

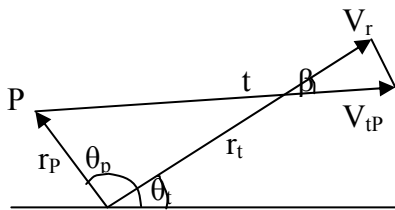
$$V_{tp} = \frac{q}{2\pi r_{tp}} \quad (20)$$

در محاسبات  $\frac{q}{2\pi} = 1$  و به عبارت دیگر، چشمه با قدرت واحد ( $m = 1$ ) فرض شده است. بر این اساس:

$$V_{tp} = \frac{1}{r_{tp}} \quad (21)$$

با توجه به شکل (۳):

$$V_r = V_{tp} \cos\beta = G(p, t) \quad (22)$$



شکل ۳- سرعت در نقطه  $t$  ناشی از چشمه در  $p$

سرعت القاء شده در نقطه  $t$  در اثر گردابه با قدرت واحد در نقطه  $p$  در جهت  $\theta$  عبارتست از:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (23)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \Rightarrow V_{tp} = \frac{-\Gamma}{2\pi r} \quad (24)$$

در محاسبات  $\frac{-\Gamma}{2\pi} = \gamma$  و  $\gamma = 1$  بوده و در نتیجه:

$$V_{tp} = \frac{1}{r_{tp}} \quad (25)$$

مغشوش فرض شده و از افت اندازه حرکت در این فاصله صرفنظر می‌شود.

همچنین فاکتور شکل  $H$  در ابتدای لایه مرزی مغشوش بین  $1/3$  تا  $1/4$  در نظر گرفته می‌شود.

در لایه مرزی آرام طبق روش توایت<sup>۶</sup> در نقطه جدائی  $\lambda_{sep} = -0.09$  و در لایه مرزی مغشوش طبق روش هد<sup>۷</sup>،  $H = 2.4$  می‌باشد. بنابراین برای لایه مرزی آرام و مغشوش، به ترتیب روابط (۱۶) و (۱۷) بدست می‌آیند [۷]:

$$\theta^2 = \frac{0.45\mu}{\rho U_e^6} \int_0^x U_e^5 dx \quad (16)$$

$$\frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} (U_e \theta H_1) = 0.0306(H_1 - 3) - 0.6169 \quad (17)$$

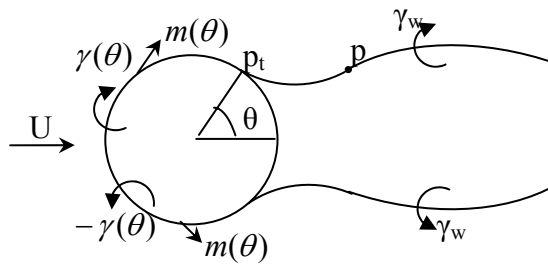
که در این روابط برای  $H \leq 1.6$  بدست می‌آید:

$$H_1 = 3.3 + 0.8234(H - 1.1)^{-1.287} \quad (18)$$

و برای  $H > 1.6$  بدست می‌آید:

$$H_1 = 3.3 + 1.5501(H - 0.6778)^{-3.064} \quad (19)$$

در محاسبه سینگولاریته‌ها با توجه به شکل (۱)، صفحه محاسباتی بصورت شکل (۲) در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۲- توزیع سینگولاریته‌ها

<sup>6</sup> - Thwaite

<sup>7</sup> - Head

$$\gamma(\theta_t) = \frac{\gamma_w Q(\theta_t) - \sin \theta_t}{\pi} \quad (31)$$

$$Q(\theta_t) = \int_{p_0}^{p_1} [G(p, t) - G'(p', t)] ds_p \quad (32)$$

با توجه به اینکه نقاط سکون، دقیقاً بعد از نقاط جدائی می باشند، لذا در نقطه جدائی ( $\theta_d$ ) باید سرعت مماسی ناشی از گردابه ها با سرعت مماس ناشی از چشمه ها برابر و عکس هم بوده و به عبارت دیگر  $U_s = -2\pi\gamma_d$ . حال، با در نظر گرفتن بقاء ورتیسسته در نقطه جدائی ( $\gamma_s = \gamma_w + \gamma_d$ ) نتیجه می شود:

$$\gamma_w = \frac{2 \sin \theta_s - u_s}{2(Q_s - \pi)} \frac{Q_s}{\pi} + \frac{U_s}{2\pi} \quad (33)$$

### ۵- محاسبه توزیع فشار

سرعت مماسی روی استوانه در اثر وجود تمام سینگولاریتی ها عبارتست از:

$$U_e(\theta) = -\sin \theta + u(\theta) + \pi\gamma(\theta) + \gamma_w Q(\theta) \quad (34)$$

با قرار دادن قدرت گردابه ها بدست می آید:

$$U_e(\theta) = -2\sin \theta + u(\theta) + \frac{(u_s - 2 \sin \theta_a)}{(\pi - Q_a)} Q(\theta) \quad (35)$$

در این معادله اندیس  $a$  مربوط به نقطه جدائی است و جمله اول در اثر جریان یکنواخت، جمله دوم ناشی از جابجائی لایه مرزی و جمله سوم در اثر ترکیب اثرات لایه مرزی و ویک می باشند. پس از نوشتن معادله برنولی و اعمال شرط عدم لغزش روی سطح استوانه و بدون بعد کردن سرعتها با استفاده از  $U_\infty$ ، ضریب فشار بدست می آید:

$$C_P(\theta) = 1 - U_e^2(\theta) \quad (36)$$

$$V_\theta = V_{tp} \cos \beta = G(p, t) \quad (26)$$

اگر  $V(\theta_t)$  را سرعت مجازی برای به حساب آوردن لایه مرزی در جریان پتانسیل در نظر بگیریم، آنگاه سرعت عمودی ناشی از تمام چشمه های موجود روی دایره در نقطه  $t$  باید در شرط مرزی

$$r = 1 \quad V_r = V(\theta_t)$$

صدق کند بنابراین:

$$\pi m(\theta_t) + \int_0^{2\pi} m(\theta_q) G(q, t) d\theta_q = V(\theta_t) \quad (27)$$

چون نقاط  $q$  و  $t$  هر دو روی دایره می باشند  $G(q, t) = 0.5$  و بدلیل تقارن در توزیع چشمه، قدرت توزیع چشمه با استفاده از رابطه (۲۸) بدست می آید:

$$m(\theta_t) = \frac{V(\theta_t) - \bar{V}/2}{\pi} \quad (28)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(\theta) d\theta \quad (29)$$

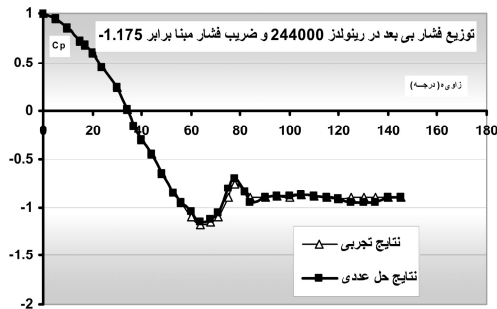
سرعت مماسی ناشی از جریان یکنواخت و گردابه های توزیع شده روی دایره و روی خط جریان آزاد، در نقطه  $t$  (نقطه ای روی دایره) باید در شرط مرزی  $V(\theta) = 0$  روی سطح استوانه و درون آن صدق کند. زیرا داخل دایره نقطه منفردی وجود نداشته و بنابراین نباید جریانی داخل دایره وجود داشته باشد. بدین ترتیب:

$$\pi\gamma(t) - \sin \theta_t + \int_{p_0}^{p_1} \gamma(p) [G(p, t) - G'(p', t)] ds_p = 0 \quad (30)$$

با توجه به این رابطه، با ثابت بودن قدرت گردابه از  $p_0$  تا  $p_1$  برابر  $\gamma_w$ ، توزیع قدرت گردابه روی استوانه بدست می آید:

شکل‌های (۴) و (۵) و (۶) نمایش داده شده است. با توجه به این شکل‌ها می‌توان نتایج را با مقادیر تجربی مقایسه نمود. نتایج با داده‌های تجربی تطابق مناسبی را نشان می‌دهند.

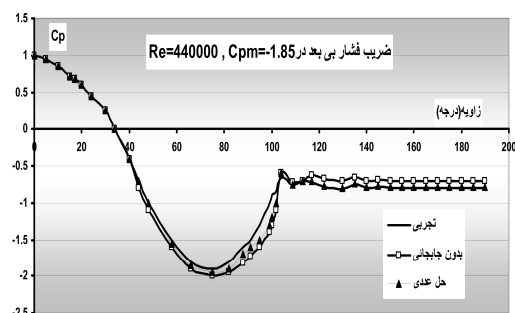
در شکل (۴) توزیع فشار بدون بعد در جریان آرام برای عدد رینولدز ۲۴۴۰۰۰ رسم گردیده است.



شکل ۴- توزیع فشار بی بعد برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰

با افزایش عدد رینولدز، در حدود رینولدز ۴۲۰۰۰۰ میدان جریان از حالت آرام به مغشوش تبدیل می‌شود [۷].

برای جریان مغشوش که لایه مرزی از دو قسمت آرام و مغشوش تشکیل شده است، بعنوان نمونه شکل‌های (۵) و (۶) برای اعداد رینولدز ۴۴۰۰۰۰ و ۴۲۸۰۰۰۰ رسم گردیده است.



شکل ۵- توزیع فشار بی بعد برای رینولدز ۴۴۰۰۰۰

کمیت طول و یک حدود  $2.3D$  در نظر گرفته می‌شود. برای بدست آوردن معادله خط جریان جدا شده از نقطه جدائی، باید شرط عدم تغییر تابع جریان در طول خط جریان را اعمال نمائیم:

$$d\psi_{sep} = -u_{\theta} dr + ru_r d\theta = 0 \quad (37)$$

معادله (۱۱) بعنوان حدس اول برای منحنی خط جریان آزاد جدا شده از نقطه جدائی در نظر گرفته شده و در تکرارهای بعدی معادله این خط جریان بدست می‌آید:

$$r_{i+1} = r_i \exp\left[\frac{u_r}{u_{\theta}}(\theta_{i+1} - \theta_i)\right] \quad (38)$$

از  $\theta_0$  تا  $\theta_{sep}$  با تقسیمات مساوی تغییر می‌کند.

در هر تکرار پس از محاسبه  $U_e$ ، از آن بعنوان ورودی برای محاسبات لایه مرزی استفاده می‌شود. با محاسبه  $\delta^*$  و سپس  $V(\theta)$ ، با یافتن توزیع گردابه‌ها و چشمه‌های جدید، روند حل عددی تا همگرایی به منظور حصول شرایط بهینه از نظر تعداد گره‌ها و دقت و زمان لازم برای محاسبه در هر تکرار ادامه می‌یابد. به منظور همگرایی سریع و دقیق، از ضریب زیر تخفیف<sup>۸</sup>  $w = 0.8$  در هر تکرار برای تقریب مقادیر کمیتها طبق معادله (۳۹) استفاده می‌شود.

$$a^{k+1} = a^k + w(a^k + 1 - a^k) \quad (39)$$

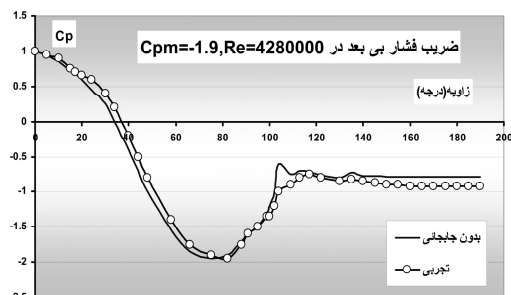
## ۶- نتایج

مدلسازی عددی جریان با توجه به عدد رینولدز (جریان آرام و مغشوش) و ضریب فشار کمینه تجربی به عنوان مقادیر ورودی، انجام گرفته و طول و یک، زاویه جدائی و ضریب فشار حول استوانه بدست آمده است. منحنی توزیع فشار بدون بعد (ضریب فشار  $C_p$ ) روی سطح استوانه بر حسب زاویه از نقطه سکون، در

<sup>8</sup> - Under Relaxation

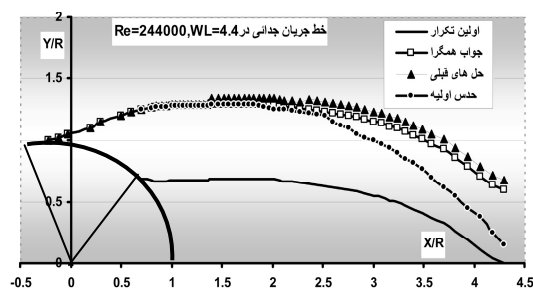
لایه مرزی و متاثر شدن میدان جریان از وجود استوانه می باشد. سپس تا نقطه جدائی افزایش یافته و پس از نقطه جدائی در مقدار ثابتی کوچکتر از یک باقی می ماند. نتایج بدست آمده بر اساس این شکل ها، انطباق خوبی با داده های تجربی را نشان می دهند اما در نزدیک نقطه جدائی اختلافی حدود ۵ درصد را نشان می دهد. علت این اختلاف در نزدیک نقطه جدائی، خطائی است که در روشهای تقریبی حل لایه مرزی (روش های توایت<sup>۹</sup> و هد<sup>۱۰</sup>) در محاسبه ضخامت لایه مرزی وجود دارد.

شکل (۴) برای جریان آرام انطباق بسیار خوبی بین داده های تجربی و نتایج حل عددی را نشان می دهد. در این رینولدز زاویه جدائی ۷۸ درجه می باشد. با افزایش عدد رینولدز و تبدیل میدان جریان از حالت آرام به مغشوش (شکل های (۵) و (۶))، زاویه جدائی به تدریج افزایش یافته و از حدود ۷۸ درجه به ۱۰۵ درجه رسیده و طول ویک نیز افزایش را نشان می دهد. این امر بدلیل اندازه حرکت خطی بیشتر جریان مغشوش نسبت به جریان آرام می باشد. به عبارت دیگر با افزایش رینولدز، طول ویک وسعت بیشتری پیدا کرده و وجود استوانه در طول بیشتری از میدان جریان ایجاد اغتشاش می کند. در این حالت با وجود افزایش زاویه جدائی، فاصله بین دو نقطه جدائی بالا و پائین کمتر شده و ناحیه ویک محدوده کمتری را اشغال می کند. بنابر این اختلاف فشار بین جلو و پشت استوانه که ناشی از محدوده وسیع ناحیه ویک در حالت آرام بود و باعث نیروی درگ<sup>۱۱</sup> فشاری قابل ملاحظه ای می شد، در حالت مغشوش کم شده و نیروی درگ وارد بر استوانه به شدت کاهش می یابد. علت این امر، اندازه حرکت خطی زیاد جریان مغشوش است که باعث می شود خطوط جریان شکل منطبق بر بدنه<sup>۱۲</sup> خود را حفظ نمایند و فشار معکوس روی استوانه کاهش یابد. به همین دلیل بازیابی فشار در پشت استوانه در جریان مغشوش بیشتر از جریان آرام بوده و مقدار ضریب فشار



شکل ۶-  $C_p$  با رینولدز ۴۲۸۰۰۰۰ بدون جریان مجازی

بعنوان نمونه منحنی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی بصورت حدس اولیه و نهائی در شکل (۷) برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰ (جریان آرام) در زاویه جدائی ۷۸ درجه رسم گردیده است.



شکل ۷- خط جریان جدائی برای رینولدز ۲۴۴۰۰۰

در جدول (۱) نتایج محاسبات بصورت ضریب فشار کمینه ( $C_{p_m}$ ) و همچنین مقدار تجربی آن، مقدار درصد خطا در محاسبه ضریب فشار کمینه، کمیت طول ویک ( $W_L$ )، زاویه جدائی جریان ( $\theta_{sep}$ )، قدرت گردابه ثابت روی خط جریان جدا شده از نقطه جدائی ( $\gamma_w$ ) و قدرت گردابه در نقطه جدائی ( $\gamma_s$ )، برای اعداد رینولدز مختلف در حالت آرام و مغشوش، ارائه گردیده است.

## ۷- نتیجه گیری

طبق شکل های (۴) و (۵) و (۶)، ضریب فشار بدون بعد در نقطه سکون در تمام رینولدزها واحد می باشد و با حرکت روی سطح استوانه، روند کاهشی را تا مقدار کمینه خود نشان می دهد که بدلیل رشد ضخامت

<sup>9</sup> -Thwaite

<sup>10</sup> -Head

<sup>11</sup> -Drag force

<sup>12</sup> -Streamlining

مبنا ( $Cp_b$ ) در جریان مغشوش بزرگتر از جریان آرام است.

شکل (۵) در جریان لایه مرزی مغشوش با رینولدز  $440000$ ، یکبار با در نظر گرفتن اثر ضخامت جابجایی لایه مرزی در روند حل عددی و بار دیگر بدون آن ضریب فشار را نمایش می‌دهد. از این شکل ملاحظه می‌شود که مدل سازی جریان، بدون در نظر گرفتن ضخامت جابجایی لایه مرزی در اعداد رینولدز متوسط، خطای قابل ملاحظه ای را در بر دارد. زاویه جدائی جریان نیز از حدود  $80$  درجه برای جریان آرام به حدود  $105$  درجه برای جریان مغشوش رسیده است.

نتایج بدست آمده از توزیع فشار در شکل (۶) نشان می‌دهد که برای رینولدز  $4280000$  اگر از اثر ضخامت جابجایی لایه مرزی صرف نظر کنیم خطای بسیار اندکی بوجود آمده و با دقت مناسبی می‌توان از جریان مجازی در رینولدزهای بالا صرف نظر نمود. همچنین در تمام منحنی‌ها، ضریب فشار پس از نقطه جدائی ( $Cp_b$ ) در مقدار ثابتی باقی می‌ماند، زیرا جریان در ناحیه ویک حالت تصادفی داشته و احتمال وجود سیال و ایجاد فشار آن روی سطح استوانه در همه جا یکسان است.

طبق شکل (۷)، مشاهده می‌شود که در جریان آرام برای رینولدز  $244000$ ، موقعیت خط جریان از مقدار حدس اولیه  $125$  درجه به مقدار  $78$  درجه پس از همگرایی روش حل عددی رسیده است. حدس اولیه از زاویه  $125$  درجه شروع شده و پس از همگرایی زاویه جدائی در  $78$  درجه نیز رسم شده و سپس به منحنی نهائی رسیده است.

جدول (۱) نشان می‌دهد که روند تغییرات  $\gamma_s$  و  $\gamma_w$  با افزایش رینولدز از نظر قدر مطلق کاهش یافته است. همچنین ملاحظه می‌شود که  $Cp_m$  با افزایش رینولدز، کاهش یافته و با رسیدن جریان به حالت مغشوش آهنگ کاهش سریعتری را به خود می‌گیرد. درصد خطا در محاسبه  $Cp_m$  نیز در جریان مغشوش بیشتر از جریان آرام است اما به  $3$  درصد نمی‌رسد. مغشوش شدن جریان اثر چشمگیری روی افزایش کند طول ویک  $W_L$  ندارد. زاویه جدائی نیز به شدت تابع نوع جریان بوده و تغییرات زیادی را نشان می‌دهد.

جدول ۱- نتایج عددی

Re	$Cp_m(\text{exp})$	$Cp_m$	Deviation (%)	$W_L$	$\theta_{\text{sep}}$	$\gamma_w$	$\gamma_s$
101000	-1/32	-1/3197	0/23	4	80	-0/2146	-0/21984
207000	-1/08	-1/074	0/55	4,2	76	-0/212	0/21135
244000	-1/18	-1/175	0/42	4,4	78	-0/2069	-0/20869
323000	-1/24	-1/21	2/24	4,8	84	-0/20035	-0/2004
428000	-1/9	-1/85	2/63	4,9	105	-0/17859	-0/1778
440000	-1/92	-1/88	2/08	4,92	106	-0/17829	-0/1775
4280000	-1/95	-1/9	2/65	5,6	109	-0/16597	-0/16575

4-Parkinson and Jandali, A Wake Source model for bluff body Potential flow, J.Fluid Mech, Vol 40, PP 577 – 594, 2002.

5-F.D.Deffenbaugh, Time Development of Flow about an Impulsively Started Cylinder, AIAA.J, Vol. 14, no. 7, PP 908 – 913.

6-Celik and pated and Landweber, Calculation Mean Flow Past circular Cylinders by Viscous Inviscid Interaction, J. Fluids Engineering, Vol.107, PP 218 – 223 , 2004.

7-White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 1995.

#### ۸- مراجع

1-R.B. Payne, Calculation of unsteady Viscous flow Past a circular Cylinder, J.Fluid. Mechanics, Vol. 4, 1957.

2-A.E.Bryson, Symmetric Vortex Separation on Circular Cylinders, J. Applied Mechanics, PP 643-646, 1959.

3-Sarpkaya, Inviscid Model of two - Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder, AIAA.J, Vol. 17, No. 11, PP 1193 - 1200.