یادداشت فنی

تحلیل ارتعاشات اجباری رایزرهای دریایی غیرخطی با روش تحلیلی هموتوپی

محمود پورجمشیدیان[۱*]، سعید محجوب‌مقدس[۲]، امیر علاالدین مطلبی[۳]، جواد شیخی[۴]

[۱] کارشناسی ارشد دانشگاه جامع امام حسین (ع)، jamshidi@ihu.ac.ir
[۲] دانشیار مکانیک دانشگاه جامع امام حسین(ع)؛ S.mahjoobmoghadas@yahoo.com
[۳] مربی هوافضا دانشگاه جامع امام حسین(ع)؛ a.motalebi@yahoo.com
[۴] کارشناسی ارشد عمران دانشگاه جامع امام حسین(ع)؛ javad.sheikhi1989@yahoo.com

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۸/۱۵
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۱۳
تاریخ انتشار مقاله: ۱۳۹۳/۰۶/۳۱

کلمات کلیدی:
ارتعاشات غیرخطی
رایزرهای دریایی
سکوی شناور

چکیده

در این مطالعه، از روش تحلیلی هموتوپی برای آنالیز ارتعاشات غیرخطی رایزرهای دریایی، که تحت بار محوری متغیر قرار دارند، استفاده شده است. در مدل پیشنهادی برای رایزر، کشیدگی صفحه میانی در نظر گرفته شده است. برای تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر ارتعاشات رایزر به معادله دیفرانسیل معمولی، از روش تجزیه گالرکین استفاده می‌شود. با استفاده از روش هموتوپی، عبارتی تحلیلی برای بیان فرکانس طبیعی غیرخطی رایزر به دست آمده است. اثر پارمترهای طراحی مانند طول رایزر و جابجایی استاتیکی اولیه تکیه‌گاه بالایی، بر فرکانس رایزر بررسی شده است. عبارت تحلیلی به دست آمده، برای محدوده‌ی وسیعی از دامنه‌ی ارتعاشات درست می‌باشد. مقایسه نتایج تحلیلی و حل عددی رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم، تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

Forced Vibration Analysis of a Nonlinear Marine Riser Using Homotopy Analysis Method

Mahmoud poorjamshidian[1], Saeid Mahjoob Moghadas [2*], Amir Alaeddin Mottalebi [3], Javad Sheikhi[4]

[1] *M.Sc. Student, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University; jamshidi@ihu.ac.ir*
[2] *Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University; S.mahjoobmoghadas@yahoo.com*
[3] *Instructor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University; a.motalebi @yahoo.com*
[4] *M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, Imam Hossein University; javad.sheikhi1989@yahoo.com*

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 6 Nov. 2013
Accepted: 4 Aug. 2014
Available online: 22 Sep. 2014

Keywords:
Non-linear vibration
Marine Riser
Vessel

ABSTRACT

In this study, Homotopy analysis method is employed for nonlinear vibrational analysis of marine riser subjected to variable axial loads. Mid-plane stretching effect has been considered in the model. Galerkin's decomposition technique is used to convert the Partial differential equation of the motion to nonlinear ordinary differential equation. Homotopy analysis method (HAM) is applied to find analytical expressions for nonlinear natural frequencies of the riser. Effects of design parameters such as riser’s length and Initial static displacement of upper support on riser frequency are investigated. The analytical expressions are valid for a wide range of vibration amplitudes. Comparing the semi-analytical solutions with numerical results, presented in the literature, indicates proper agreement.

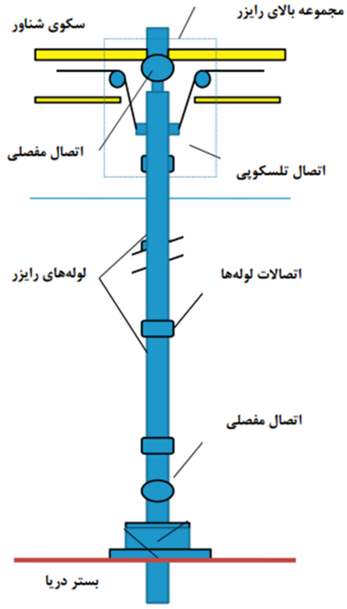
۱ – مقدمه

سکوها، یکی از انواع سازه‌های دریایی هستند که برای اکتشاف و استخراج نفت در ناحیه فراساحلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این سکوها به دو دسته ثابت و شناور تقسیم می‌شوند. رایزرهای دریایی مهمترین و حساس‌ترین قسمت این سازه به حساب می‌آید. این عضو، برای انتقال نفت از بستر دریا به سطح عرشه سکو به کار می-

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

رود. رایزر دارای دو تکیه‌گاه مفصلی در انتهاهای خود است. مفصل بالایی تحت یک جابجایی استاتیکی اولیه و همچنین جابجایی دینامیکی توسط سکو قرار دارد[۱]. در شکل ۱ نکات مطرح شده کاملا مشخص می‌باشند.



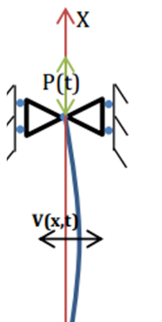
شکل ۱ – شماتیک کلی یک رایزر استخراج سیال[۲]

رایزرها به علت طول زیاد خود، تحت اثر بارهای وارده، تغییر شکل‌های غیرخطی دارند که تحلیل آنها را با مشکل روبرو می‌کند[۳]. از این رو برای تحلیل رفتار پیچیده‌ی این گونه سازه‌ها تا کنون روش‌های تحلیلی و عددی پیشنهاد گردیده است[۴]. یکی از عوامل مهم در تحلیل و طراحی رایزرهای دریایی برآورد بارهای وارد بر آنها است. در این راستا، پژوهشگران تلاش‌های فراوانی کرده‌اند که حاصل آنها به صورت آیین نامه‌های طراحی در دسترس است[۵, ۶]. در طراحی سکوها و سازه‌های فراساحلی بایستی نیروهای وارده بر سکو در مدت زمان بهره‌برداری بررسی و مورد توجه قرار گیرد. نیروهای وارده ناشی او امواج سطحی، نیروهای حاصل از باد و جریان‌های دریایی می‌باشند[۷, ۸]. امواج یکی از مهم‌ترین نیروهای اثر کننده بر سازه‌های دریایی هستند که می‌توان آنها را به دو گروه منظم و غیر منظم، همچنین خطی و غیرخطی دسته‌بندی کرد. این امواج در طبیعت اغلب به صورت نامنظم تصادفی هستند. اما در طراحی‌های آیین نامه‌ای بیشتر به صورت منظم، که متناوب در زمان و مکان هستند، الگوسازی می‌شوند. برای امواج نامنظم، نمی‌توان دوره تناوب مشخصی را تعریف کرد. امواج خطی که به امواج دامنه کوتاه نیز معروفند امواجی می‌باشند که در آن نسبت ارتفاع موج به طول موج خیلی کمتر از یک است. در حالی که، در امواج استوک[1] که به امواج دامنه محدود معروفند، امواج دارای قله‌های تیزتر و دره‌های صاف‌تر هستند[۹]. سازه‌های بلند یک نوع سازه‌ی الاستیک غیرخطی به حساب می‌آیند. برای داشتن یک پیش‌بینی دقیق از رفتار این نوع سازه‌ها، در نظر گرفتن منابع ایجاد کننده‌ی ترم‌های غیرخطی، در معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات آنها ضروری است[۱۰-۱۲]. در تحلیل‌های غیرخطی صورت گرفته بر روی سازه‌ی رایزر، بیشتر از روش‌های عددی و یا ترکیبی از روش عددی و تحلیلی استفاده شده است. در این راستا، تعدادی از تحقیقات انجام شده، ترم غیرخطی حاصل از دمپینگ سیال اطرف را در نظر گرفته‌اند[۱۳-۱۷].

در این مطالعه، با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی، به آنالیز ارتعاشات غیرخطی رایزرهای دریایی، در آب‌های ساکن پرداخته شده است. ابتدا با توجه به شرایط کلی یک رایزر، مدلی برای آن ارائه داده می‌شود. سپس در استخراج معادله‌ی حاکم، کشیدگی صفحه میانی رایزر به دلیل ارتعاشات دامنه‌ی بزرگ آن، در نظر گرفته شده است. همچنین اثر دمپینگ سیال، با استفاده از مدل موریسون به صورت غیرخطی بیان می‌گردد. برای تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی حاکم به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی معروف به معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات، از روش گالرکین استفاده می‌شود. در ادامه، با حل معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات، یک رابطه‌ی تحلیلی برای بیان فرکانس غیرخطی ارتعاشات رایزر به دست آورده شده است. با استفاده از این عبارت تحلیلی، به مطالعه اثر پارامترهای طراحی بر ارتعاشات رایزر، پرداخته می‌شود.

۲ – مدل‌سازی رایزر و استخراج معادلات

با توجه به نسبت بزرگ ارتفاع به سطح مقطع رایزرها، می‌توان برای مدل کردن این سازه، از تئوری اویلر-برنولی استفاده کرد[۱۱]. در این تئوری، از اثرات اینرسی چرخشی سطح مقطع و تغییر شکل برشی آن، صرف‌نظر می‌شود[۱۸, ۱۹]. در مطالعه حاضر، فرض می‌شود که رایزر در آب ساکن قرار دارد. همچنین، تنها تحریک اعمالی به سازه، از طریق سکوی شناور و در اثر موج‌های سطحی می‌باشد. با توجه به شکل ۱ و نکات مطرح شده در این بخش، مدلی ساده برای رایزر به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲ – شماتیک کلی یک رایزر استخراج سیال

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

در شکل ۲ p(t) عبارتی برای بیان موج منظم اعمال شده از سکوی شناور به رایزر است[۹]. V(x,t) دامنه‌ی ارتعاشات رایزر، در مختصه‌ی x و زمان t می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که، تکیه‌گاه بالایی شکل ۲ توسط مکانیسم پنوماتیکی تعبیه شده در سکوی شناور، در ابتدای ارتعاشات، به اندازه‌ی مشخصی تحت جابجایی استاتیکی اولیه قرار می‌گیرد[۲, ۳]. معادلات کلی حاکم بر ارتعاشات تیرهای اویلر-برنولی، به شکل زیر می‌باشد[۱۱, ۲۰].

$$\frac{\partial T(\mathrm{x,t})}{\partial X}=f_X-X \tag{۱-الف}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(EI\frac{\partial^2 V(\mathrm{x,t})}{\partial X^2}\right)-\frac{\partial}{\partial X}\left(T(\mathrm{x,t})\frac{\partial V(\mathrm{x,t})}{\partial X}\right)+ m\frac{\partial^2 V(\mathrm{x,t})}{\partial t^2}=f_Y-Y \tag{۱-ب}$$

در معادله‌ی (۱) V(x,t) تغییر شکل عرضی تیر است. m جرم واحد طول، E مدول الاستیسیته، I ممان اینرسی سطح مقطع، T(x,t) نیروی محوری در امتداد طول تیر، (X, Y) نیروهای حجمی و (f_x, f_y) سایر نیروهای خارجی وارده بر تیر هستند. از قسمت الف معادله‌ی (۱) می‌توان رابطه‌ای برای بیان نیروی محوری، در امتداد طول تیر به دست آورد. به دلیل فرض ارتعاشات دامنه‌ی بزرگ، رابطه‌ی کرنش-جابجایی غیرخطی بوده و به شکل زیر است[۱۰]:

$$\Delta=\frac{\partial U(\mathrm{x,t})}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V(\mathrm{x,t})}{\partial x}\right)^2 \tag{۲}$$

در معادله‌ی (۲) U(x,t) جابجایی در امتداد طول تیر است. با توجه به رابطه‌ی تنش-کرنش می‌توان نوشت:

$$T(\mathrm{x},t)=EA\Delta=EA\left(\frac{\partial U(\mathrm{x,t})}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V(\mathrm{x,t})}{\partial x}\right)^2\right) \tag{۳}$$

اگر از نیروهای حجمی و خارجی در معادله‌ی (۱) صرف‌نظر شود، قسمت الف این معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$T(t)=c(\mathrm{t}) \tag{۴}$$

با استفاده از معادلات (۳) و (۴) می‌توان رابطه‌ی زیر را به دست آورد:

$$U(\mathrm{x,t})=\frac{c(t)}{EA}x-\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial V(\mathrm{x,t})}{\partial X}\right)^2 d\xi+c_1(t) \tag{۵}$$

با توجه به شکل ۱، شرایط مرزی در امتداد طول تیر، با معادله‌ی (۶) بیان می‌شود:

$$\begin{cases}U(0,t)=0\\ U(\mathrm{L},t)=U_0+p(\mathrm{t})\end{cases} \tag{۶}$$

در معادله‌ی (۶) U_0 جابجایی استاتیکی اولیه و P(t) نیز جابجایی دینامیکی را در تکیه‌گاه بالایی نشان می‌دهد. در نهایت، با استفاده از معادلات (۴) تا (۶)، نیروی محوری در امتداد طول رایزر به دست می‌آید:

$$T(t)=\frac{EA}{L}\left(U_0+p(t)+\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{\partial V(\mathrm{x,t})}{\partial x}\right)^2 dx\right) \tag{۷}$$

در معادله‌ی (۷) L طول رایزر است. همان‌طور که در معادله‌ی (۷) مشخص است، نیروی محوری تنها تابعی از زمان می‌باشد. عبور جریان سیال از میان رایزر، باعث ایجاد نیروهایی از جانب سیال به روی رایزر می‌شود. مهمترین این نیروها حاصل از شتاب کریولیس و شتاب جانب به مرکز جرم عبوری است که به شکل زیر تعریف می‌گردند[۲۱]:

$$\begin{cases}f_c=\rho A u^2\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\\ f_k=2\rho A u\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x\partial t}\end{cases} \tag{۸}$$

در معادلات (۸) A سطح مقطع عبور جریان، u سرعت جریان و ρ چگالی سیال می‌باشند. چون تغییر شکل در رایزر به آرامی صورت می‌گیرد از ترم شتاب کریولیس صرف‌نظر می‌شود[۱۱]. با قرار دادن معادله‌ی (۷) و (۸) در قسمت ب معادله‌ی (۱) و با ثابت فرض کردن سختی خمشی ثابت رایزر، می‌توان نوشت:

$$EI\frac{\partial^4 V(\mathrm{x,t})}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 V(\mathrm{x,t})}{\partial t^2}+\rho A u^2\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}- \frac{EA}{L}\left(U_0+p(t)+\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{\partial V(\mathrm{x,t})}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 V(\mathrm{x,t})}{\partial x}=0 \tag{۹}$$

برای تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی (۹) به یک معادله دیفرانسیل معمولی، از روش گالرکین استفاده می‌شود. به همین منظور، حل کلی این معادله، به صورت حاصل‌ضرب دو تابع جدا از هم، با متغیرهای متفاوت، بیان می‌گردد[۲۲, ۲۳]:

$$V(x,t)=v(t)\phi(x) \tag{۱۰}$$

در مسئله‌ی حاضر، در ادامه‌ی استفاده از روش گالرکین ، فرض می‌شود که، در معادله‌ی (۱۰) ϕ(x) یکی از شکل مدهای خطی تیر دو سر مفصل است. در نتیجه v(t) دامنه‌ی وابسته به زمان ارتعاشات می‌باشد[۲۴]. با قرار دادن معادله‌ی (۱۰) در معادله‌ی (۹) خواهیم داشت:

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

$$EI\frac{\partial^4\phi(x)}{\partial x^4}v(t)+m\phi(x)\frac{\partial^2 v(t)}{\partial t^2}+\rho Au^2\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} v(t)-\frac{EA}{L}\left(U_0+p(t)+\frac{1}{2}v(t)^2\int_0^L\left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right)^2dx\right)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}v(t)=0 \quad (۱۱)$$

شکل مد اول یک تیر دو سر مفصل به صورت زیر است[۱۹]:

$$\phi(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (۱۲)$$

شرایط مرزی در جهت عرضی برای رایزر شکل ۲، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} V(0,\mathrm{t})=\dfrac{\partial^2 V(0,\mathrm{t})}{\partial x^2}=0 \\ V(\mathrm{L},\mathrm{t})=\dfrac{\partial^2 V(\mathrm{L},\mathrm{t})}{\partial x^2}=0 \end{cases} \quad (۱۳)$$

برای اعمال روش گالرکین، همان شکل مد خطی به عنوان تابع وزن در نظر گرفته می‌شود. به همین منظور، عبارت شکل مد در ترم‌های معادله‌ی (۱۱) ضرب شده و سپس، از تمامی جملات آن در طول تیر انتگرال گرفته می‌شود. در نهایت معادله‌ی دیفرانسیل معمولی، معروف به معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات تیر، به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\ddot v(t)+\left(\omega_0{}^2+\delta p(t)\right)v(t)+\alpha v(t)^3=0 \quad (۱۴)$$

در معادله‌ی (۱۴) علامت دات، بیانگر مشتق نسبت به زمان است. ضرایب بیان شده در این معادله، برای شکل مد اول به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\alpha=\frac{AE\pi^4}{4mL^4},\omega_0^2=\frac{E\pi^2\left(I\pi^2+ALU_0\right)}{mL^3}-\frac{\rho A(u\pi)^2}{mL^2} \qquad \delta=\frac{EA\pi^2}{mL^2} \quad (۱۵)$$

از طرفی، سیال احاطه کننده‌ی رایزر، نیروی دمپینگ به رایزر اعمال می‌کند. با فرض سیال ساکن، بر اساس مدل موریسون برای دمپینگ غیرخطی سیالات، می‌توان نیرو دمپینگ را به شکل زیر نوشت[۱۱, ۲۵]:

$$f_d=\mu\dot v(t)\left|\dot v(t)\right|$$

در معادله‌ی فوق، μ ضریب دمپینگ سیال است که، تابعی از ضریب درگ، چگالی آب دریا و سطح موثر رایزر است. با اضافه کردن این ترم به معادله‌ی (۱۴)، در نهایت معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات برای رایزر به شکل زیر نوشته خواهد شد:

$$\ddot v(t)+\left(\omega_0{}^2+\delta p(t)\right)v(t)+\alpha v(t)^3+\mu\dot v(t)\left|\dot v(t)\right|=0 \quad (۱۶)$$

در ادامه به حل معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات (۱۴) پرداخته می‌شود. شرایط اولیه برای حل این معادله، به شکل زیر فرض می‌شود.

$$v(0)=a_0,\ \ \dot v(0)=0. \quad (۱۷)$$

این شرایط بیانگر آن است که رایزر، در یکی از شکل مدهای خطی خود با دامنه‌ای مشخص قرار داده می‌شود و سپس بدون اعمال سرعت اولیه، رها می‌گردد[۲۲].

۳ - روش تحلیل هموتوپی

۳-۱- ایده اصلی

هموتوپی یک روش تحلیلی، برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی است[۲۶-۲۸]. این روش، معادله دیفرانسیل غیرخطی را به تعدادی نامحدود از معادلات دیفرانسیل خطی، تبدیل می‌کند[۲۶]. همانطورکه پارامتر هموتوپی p، از صفر به یک تغییر می‌کند، حل مسئله از یک حدس مقدماتی به حل دقیق میل خواهد کرد. برای نشان دادن ایده مقدماتی روش هموتوپی، یک معادله دیفرانسیل غیرخطی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$N[v(t)]=0,\quad v(0)=a_0,\quad \dot v(0)=0 \quad (۱۸)$$

N اپراتور دیفرانسیل غیرخطی و f(t) یک تابع ناشناخته از متغیر t فرض شده است. برای رابطه‌ی (۱۸) عبارت هموتوپی به شکل زیر تعریف می‌شود[۲۹]:

$$\bar H(\varphi,\mathrm{p},\mathrm{h},H(t))=(1-p)L[\varphi(t,p)-v_0(t)]-phH(t)N[\varphi(t,\mathrm{p})] \quad (۱۹)$$

در معادله‌ی (۱۹)، φ تابعی از t و p می‌باشد. هم‌چنین، h و H(t) به ترتیب، پارامتر اختیاری و تابع اختیاری غیر صفر هستند. پارامتر و تابع اختیاری، دامنه همگرایی حل مورد نظر را تنظیم می‌کنند[۲۹]. L یک اپراتور دیفرانسیل خطی و اختیاری را نشان می‌دهد. هنگامی که p، از صفر به یک میل می‌کند، φ(t,p) از حدس اولیه برای جواب معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر، به حل دقیق آن تغییر خواهد کرد. به بیان دیگر، $\varphi(t,0)=v_0(t)$، که حل عبارت هموتوپی $H(\varphi,p,h,H(t))\,|_{p=0}=0$ می‌باشد، به $\varphi(t,1)=v(t)$، که حل عبارت هموتوپی $H(\varphi,p,h,H(t))\,|_{p=1}=0$ است، تغییر می‌کند. اعمال $H(\varphi,p,h,H(t))=0$ تغییر شکل مرتبه‌ی صفر هموتوپی را به شکل زیر ایجاد می‌کند:

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

$$(1-p)L[\varphi(t,p)-v_0(t)]=phH(t)\mathrm{N}[\varphi(t,p)] \qquad (۲۰)$$

معادله‌ی (۲۰) دارای شرایط اولیه‌ای به شکل زیر است:

$$\varphi(0,p)=a_0 \;,\; \frac{d\varphi(0,p)}{dt}=0 \qquad (۲۱)$$

توابع $\varphi(t,p)$ و $\omega(p)$ می‌توانند به صورت سری‌های توانی از p، با استفاده از تئوری تیلور، بسط داده شوند:

$$\varphi(t,p)=\varphi(t,0)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\varphi(t,p)}{\partial p^m}\bigg|_{p=0} p^m=v_0(t)+\sum_{m=1}^{\infty}v_m(t)p^m \qquad (۲۲)$$

$$\omega(p)=\omega_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\omega(p)}{\partial p^m}\bigg|_{p=0} p^m=\omega_0+\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m p^m \qquad (۲۳)$$

$v_m(t)$ و $\omega_m(p)$ تغییر شکل درجه m نامیده می‌شوند. برای محاسبه معادله‌ی تغییر شکل درجه اول، از معادله (۲۰) نسبت به p مشتق گرفته می‌شود. سپس با صفر قرار دادن مقدار p، معادله تغییر شکل درجه اول به شکل زیر به دست می‌آید:

$$L[\mathrm{v}_1(t)]=hH(t)N[\mathrm{v}_0(t),\omega_0]\big|_{q=0} \qquad (۲۴)$$

با استفاده از معادله‌ی (۲۴) می‌توان تقریب دیگری از حل معادله‌ی دیفرانسل غیرخطی را به دست آورد. شرایط اولیه معادله‌ی (۲۴) به صورت زیر می‌باشد:

$$v_1(0)=0 \;,\; \frac{dv_1}{dt}(t)=0 \qquad (۲۵)$$

تقریب‌های مرتبه‌ی بالاتر حل می‌تواند با محاسبه معادله تغییر شکل مرتبه m ($m>1$) به دست آید. که شکل هموتوپی آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L[\mathrm{v}_m(t)-v_{m-1}(t)]=hH(t)R_m(\mathrm{v}_{m-1},\vec{\omega}_{m-1}) \qquad (۲۶)$$

v_{m-1}، ω_{m-1} و $R_m(\mathrm{v}_{m-1},\omega_{m-1})$ به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_m(\vec{\mathrm{v}}_{m-1},\vec{\omega}_{m-1})=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}N[\varphi(t,p),\omega(p)]}{dp^{m-1}}\bigg|_{p=0} \qquad (۲۷)$$

$$\vec{v}_{m-1}=\{\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\dots,\mathrm{v}_{m-1}\}$$
$$\vec{\omega}_{m-1}=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{m-1}\} \qquad (۲۸)$$

معادلات مراتب بالاتر تقریب، دارای شرایط اولیه‌ای به شکل زیر هستند:

$$v_m(0)=\frac{dv_m}{dt}(0)=0 \qquad (۲۹)$$

۳-۲-کاربرد روش هموتوپی در مسئله‌ی حاضر

به منظور استفاده از روش هموتوپی، برای حل معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات رایزر، ابتدا متغیر $\tau=\omega t$ تعریف می‌شود. تغییر متغیر جدید در معادله‌ی (۱۶) اعمال شده و مجددا به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{gathered}\omega^2 v''(\tau)+\left(\omega_0^2+\delta p(\tau)\right)v(\tau)+\mu\omega^2 v'(\tau)\left|v'(\tau)\right| \\ +\alpha v(\tau)^3=0 \\ \begin{cases}v(0)=a_0\\ v'(0)=0\end{cases}\end{gathered} \qquad (۳۰)$$

در معادله‌ی (۳۰) علامت پریم بیانگر مشتق نسبت به متغیر جدید τ است. اپراتور غیرخطی معرفی شده در روش هموتوپی، برای معادله‌ی (۳۰)، به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{gathered}N\left[\varphi(\tau,p)\right]=\Omega^2(p)\frac{\partial^2\varphi(\tau,p)}{\partial\tau^2}+\omega^2\varphi(\tau,p)+ \\ \alpha\varphi^3(\tau,p)+\Omega^2(p)\mu\frac{\partial\varphi(\tau,p)}{\partial\tau}\left|\frac{\partial\varphi(\tau,p)}{\partial\tau}\right|\end{gathered} \qquad (۳۱)$$

با توجه به روش حل، یک حدس اولیه برای حل معادله‌ی (۳۰) در نظر گرفته می‌شود. باید توجه کرد که این حدس، شرایط اولیه مسئله را اقناع کند، بنابراین

$$f_0(\tau)=a_0\cos(\tau) \qquad (۳۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطه‌ی (۳۲) شرایط اولیه‌ی معادله‌ی (۳۰) را اقناع می‌کند. در ادامه‌ی حل، اپراتور خطی اختیاری، برای مسئله حاضر، به شکل زیر انتخاب می‌شود:

$$L\left[\varphi(\tau,p)\right]=\omega_0^2\left[\frac{\partial\varphi(\tau,p)}{\partial\tau^2}+\varphi(\tau,p)\right] \qquad (۳۳)$$

این اپراتور دارای ویژگی $L[a_0\cos(\tau)]=0$ می‌باشد. با فرض تابع اختیاری $H(\tau)=1$، معادله‌ی تغییر شکل مرتبه اول، با استفاده از معادله‌ی (۱۲)، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{gathered}\omega_0^2\left[\frac{\partial v_1(\tau)}{\partial\tau^2}+v_1(\tau)\right]=\omega_0^2\frac{\partial^2 v_0(\tau)}{\partial\tau^2}+\omega^2 v_0(\tau)+ \\ \alpha v_0(\tau)^3+\omega_0^2\mu\frac{\partial v_0(\tau)}{\partial\tau}\left|\frac{\partial v_0(\tau)}{\partial\tau}\right|\end{gathered} \qquad (۳۴)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

همان‌طور که گفته شد، در روش هموتوپی، حل نهایی معادله‌ی غیرخطی از جمع جبری حدس اولیه و مراتب بالاتر تقریب به دست خواهد آمد. بنابراین، باید از شکل‌گیری ترم‌های زمانی بزرگ و ناپایدار مثل $\tau\cos(\tau)$، در هر مرحله از حل جلوگیری کرد[۳۰, ۳۱]. برای جلوگیری از به وجود آمدن ترم‌های زمانی بزرگ در این مرحله، باید ضریب ترم $\cos(\tau)$ در سمت راست معادله (۳۴) پس از جایگذاری معادله‌ی (۳۲)، برابر صفر قرار داده شود که در نتیجه:

$$\omega_0=\sqrt{\omega^2+\frac{3\alpha a_0{}^2}{4}} \tag{۳۵}$$

عبارت تحلیلی (۳۵) اولین تقریب برای بیان فرکانس طبیعی غیرخطی ارتعاشات رایزر می‌باشد. سپس، پاسخ معادله‌ی (۳۴) با در نظرگرفتن شرایط اولیه در معادله‌ی (۲۵)، به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&v_1(\tau)=A_1\cos(3\tau)+A_2\sin(3\tau)+A_3\sin(5\tau)+\\
&\quad A_4\sin(7\tau)+A_5\cos(\tau(1+\Omega))+\\
&\quad A_6\cos(\tau(-1+\Omega))+A_7\cos(\tau)+A_8\sin(\tau)\\
&A_1=-\frac{p\beta a^3}{32\omega^2},\quad A_2=-\frac{p\mu\omega_0^2a^2}{15\pi\omega^2},\quad A_3=\frac{p\mu\omega_0^2a^2}{360\pi\omega^2}\\
&A_4=-\frac{p\mu\omega_0^2a^2}{240\pi\omega^2},\quad A_5=\frac{a\delta Kp}{2\omega^2\left(-(1+\Omega)^2+1\right)}\\
&A_6=\frac{a\delta Kp}{2\omega^2\left(-(-1+\Omega)^2+1\right)}\\
&A_7=-(A_6+A_5+A_1)\\
&A_8=-(3A_2+5A_3+7A_4)
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

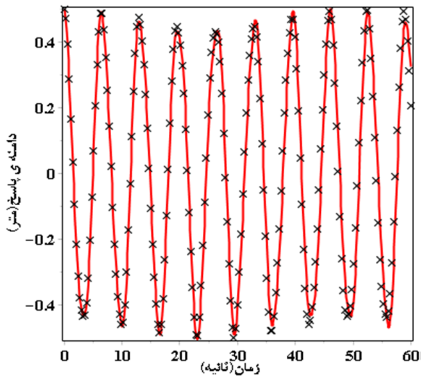
اولین تقریب برای بیان دامنه‌ی وابسته به زمان ارتعاشات رایزر، با استفاده از معادله‌ی (۲۲) از جمع جبری معادلات (۳۲) و (۳۶) محاسبه می‌شود:

$$v(\tau)=v_0(t)+v_1(t)$$

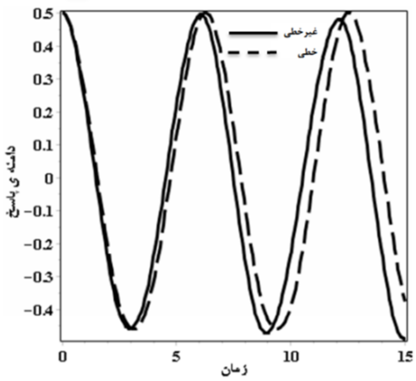
به همین ترتیب، می‌توان تقریب‌های بالاتری را برای فرکانس طبیعی غیرخطی و دامنه‌ی وابسته به زمان ارتعاشات، با استفاده از روش هموتوپی به دست آورد.

۴ – بررسی نتایج

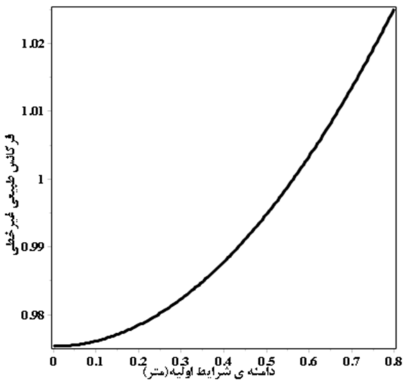
برای بررسی دقت و صحت تحلیل صورت گرفته در این مطالعه، مسئله به روش عددی نیز حل شده است. بنابراین، معادله‌ی (۱۶) با روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم و با استفاده از نرم‌افزار میپل[۲] حل شده است. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، داده‌های حاصل از روش تحلیلی و نتایج عددی کاملا منطبق می‌باشند، که بیانگر دقت و سرعت همگرایی بسیار بالای روش تحلیلی هموتوپی است. شکل ۴ اختلاف بین فرض ارتعاشات دامنه‌ی بزرگ و کوچک را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل کاملا مشخص است، زمانی که ترم غیرخطی حاصل از ارتعاشات دامنه‌ی بزرگ، در نظر گرفته نشود، پریود نوسانات کاهش می‌یابد. به بیان دیگر این امر سبب افزایش فرکانس ارتعاشات می‌شود. بنابراین برای داشتن یک تحلیل دقیق از رفتار رایزر در هنگام ارتعاشات دامنه‌ی بزرگ، لازم است ترم غیرخطی در نظر گرفته شود. شکل۵ فرکانس طبیعی غیرخطی ارتعاشات رایزر را در شکل مد اول آن، به صورت تابعی از دامنه‌ی شرایط اولیه یعنی a_0، نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل کاملا مشخص است، فرکانس غیرخطی با افزایش دامنه‌ی شرایط اولیه، افزایش می‌یابد.



شکل ۳ – مقایسه‌ی تقریب دوم حل تحلیلی ▬ و حل عددی x



شکل ۴ – مقایسه‌ی فرض خطی و غیرخطی



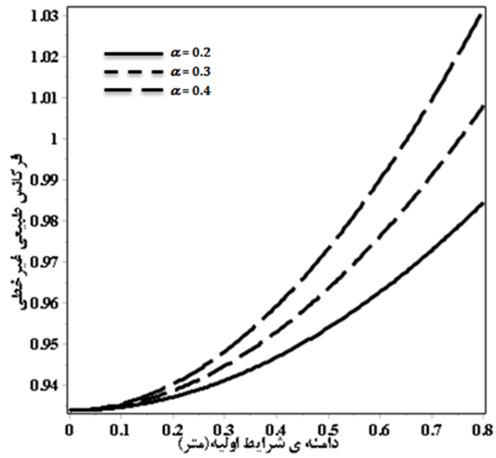
شکل ۵ – فرکانس طبیعی غیرخطی ارتعاشات در شکل مد اول

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

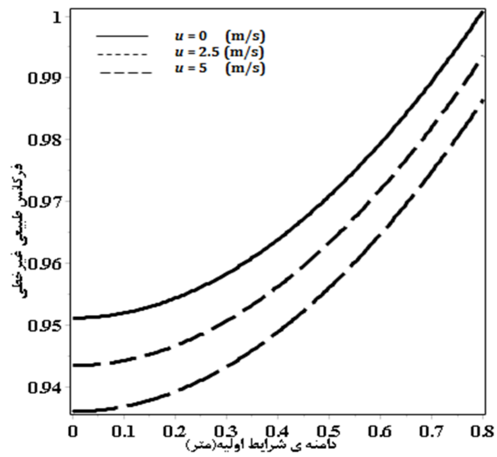
[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

در شکل ۶ اثر ضریب ترم غیرخطی بر فرکانس ارتعاشات رایزر، با ثابت نگه داشتن سایر ضرایب، بررسی شده است. این شکل، اهمیت در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی را، در تحلیل فرکانس ارتعاشات رایزر نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان مشاهده کرد که، با افزایش ضریب ترم غیرخطی درجه سوم، فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش پیدا می‌کند. نکته‌ی بسیار مهم دیگر در این شکل این است که، در دامنه‌های کوچک، اثر ترم‌های غیرخطی کم می‌باشد، به طوری که، می‌توان در ارتعاشات دامنه‌ی کوچک رایزر از اثر ترم غیرخطی چشم‌پوشی کرد. شکل ۷ اثر سرعت سیال عبوری از رایزر را بر فرکانس طبیعی غیرخطی، نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، افزایش سرعت رایزر سبب کاهش فرکانس غیرخطی می‌شود.

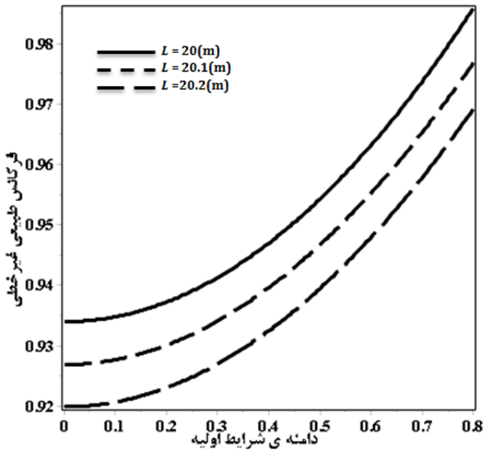
شکل ۸ تاثیر طول رایزر بر فرکانس را نشان می‌دهد. افزایش طول رایزر سبب کاهش فرکانس غیرخطی می‌شود. در شکل ۹، اثر جابجایی استاتیکی اولیه در تکیه‌گاه بالایی، بر فرکانس غیرخطی ارتعاشات، تحقیق شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش جابجایی استاتیکی اولیه، مقدار فرکانس ارتعاشات نیز افزایش می‌یابد.



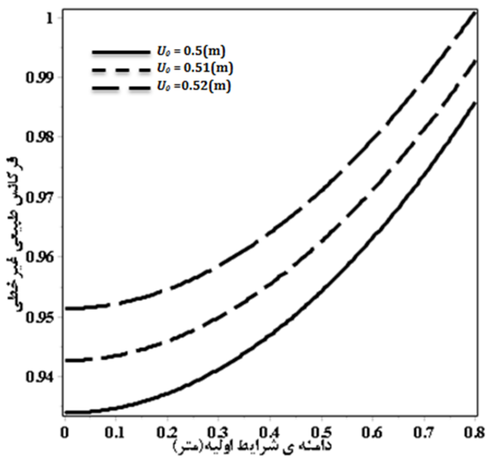
شکل ۶ - اثر ضریب ترم غیرخطی بر فرکانس طبیعی



شکل ۷ - اثر سرعت سیال داخل رایزر



شکل ۸ - اثر طول تیر بر فرکانس ارتعاشات



شکل ۹ - اثر جابجایی استاتیکی اولیه بر فرکانس ارتعاشات

۵ - نتیجه‌گیری

با استخراج معادلات ارتعاشی رایزرهای دریایی در مطالعه حاضر، مشاهده می‌شود که، کشیدگی صفحه میانی رایزر در اثر ارتعاشات دامنه بزرگ، سبب ایجاد ترم غیرخطی درجه سوم، در معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاشات آن می‌شود. روشی که در این مقاله، برای حل معادله‌ی مشخصه ارتعاشات استفاده شد، روش هموتوپی می‌باشد. مقایسه‌ی انجام گرفته بین نتایج حاصل از این روش و حل عددی رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم، بیانگر دقت و سرعت همگرایی خوب روش حاضر، در حل مسئله‌ی ارتعاشات رایزر است. بر اساس نتایج، با افزایش ضریب ترم غیرخطی درجه‌ی سوم و جابجایی استاتیکی اولیه در تکیه‌گاه بالایی، فرکانس ارتعاشات افزایش می‌یابد. در حالی که، با افزایش طول و سرعت عبور سیال داخل رایزر فرکانس طبیعی غیرخطی کاهش می‌یابد. همچنین، کاملا مشخص است که در ارتعاشات دامنه‌ی کوچک، می‌توان از ترم‌های غیرخطی صرف نظر کرد.

کلید واژگان

1- stokes
2- maple

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]

۶ - مراجع

1- Pattipawaej, O., (2006), *Modeling uncertainty inthe dynamic response of marine riser using probabilistic finite element technique*, International Civil Engineering Conference, Surabaya.

2- How, B. V. E., Ge, S. S. and Choo, Y. S., (2009), *Active control of flexible marine risers*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 320, p. 758–776.

3- Kaewunruen, S., Chiravatchradej, J. and Chucheepsakul, S., (2005), *Nonlinear free vibrations of marine risers/pipes transporting fluid*, Journal of Ocean Engineering, Vol. 32, p. 417–440.

4- Rustad, A. M., Larsen, C. M. and A. J. Sorensen, (2008), *FEM modeling and automatic control for collision prevention of top tensioned risers*, Journal of Marine Structures, Vol. 21, p. 80-112.

5- API, *RECOMMENDDED PRACTICE 2A-LRFD (RP 2A-LRFD)*, (1993).

6- API, *RECOMMENDDED PRACTICE 2A-WSD (RP 2A-WSD)*, (2000).

7- Guo, D. B., (2005), Offshore Pipelines, Elsevier.

8- Wilson, J. F., (2005), *Dynamics of Offshore Structures*, John Wiley & Sons, Inc.

9- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J., (1960), *Fifth order gravity wave theory*, Proceedings of 7th Conference on Coastal Engineering, Netherlands, p. 184-196.

10- Emam, S. A., (2002), *A Theoretical and Experimental Study of Nonlinear Dynamics of Buckled Beams,* Phd Thesis, Mechanic, Blacksburg, Virginia.

11- Kim, Y. C., (1983), *Non-linear vibration of long slender beams*, Phd Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Departement of Ocean Engineering.

12- Malatkar, P., (2003), *Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates*, Phd Thesis, Engineering Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.

13- Athisakul, C., (2002), *Large-strain static analysis of marine risers with a variational approach*, Proc 12th Int Offshore and Polar Eng Conferenc, Vol. 2 ,p. 164-170.

14- Irani, M. B., (1987), *Riser dynamics with internal flow and nutation damping,* Proc 6th Int Offshore Mech and Arctic Eng Conference, Vol. 3, p. 119-125.

15- KIRK, C. L., (1979), *Dynamic and static analysis of a marine riser*, Applied Ocean Research, Vol. 1.

16- Leklong, J., (2008), *Dynamic Responses of Marine Risers/Pipes Transporting Fluid Subject toTop End Excitations*, The International Society of Offshore and Polar Engineer, Vol. 14.

17- Patel, M. H., (1995), *Review of flexible riser modelling and analysis techniques*, Engineering Structures, Vol. 17 p. 293-304.

18- Foda, M. A., (1998), *Influence of shear deformation and rotary inertia on nonlinear free vibration of a beam with pinned Ends*, Journal Computers and Structures, Vol. 71, pp. 663-670.

19- Rao, S. S., (2011), *Mechanical Vibrations*, Newyork Wiley.

20- Parnell, L. A. and M. H. (1976), Cobble, *Lateral displacement of a cantilever beam with a concentrated mass*, Journal of Sound and Vibration ,Vol. 44, p. 499–510.

21- Xua, M. R., (2010), *Determination of natural frequencies of fluid-conveying pipes using homotopy perturbation method*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 60, p. 520-527.

22- Ahmadian, M. T. and Mojahedi, M., (2009), *Free Vibration Analysis of a Nonlinear Beam Using Homotopy and Modified Lindstedt-Poincare Methods*, Journal of Solid Mechanic, Vol. 1, p. 29-36.

23- Rashidia, M. M., (2012), *Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Karman rectangular plates*, *Computers and Structures,* Vol. 116, p. 46-55.

24- GeGen and XuJia, (2009), *Stochastic Bifurcation of One Flexible Beam Subject to Axial Gauss White Noise Excitation ICIEA, IEEE*.

25- Kaewunruen, S., (2005), *Nonlinear free vibrations of marine risers/pipes transporting fluid*, Ocean Engineering, Vol. 32, p. 417–440.

26- Liao, S. J., (1992), *On the Proposed Homotopy Analysis Techniques for Nonlinear Problems and its Application*, PhD thesis Thesis, Jiao Tong University, Shanghai, .

27- Liao, S. J. and Cheung, K. F., (2003), *Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water*, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 45, p. 105–116.

28- He, J. H., (1998), *A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 35, p. 37-43.

29- Hoseini, S. H., Pirbodaghi, T., Asghari, M., Farrahi, G. H., and M. Ahmadian, T., (2008), *Nonlinear free vibration of conservative oscillators with inertia and static type cubic nonlinearities using homotopy analysis method*, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 316, p. 263–273.

30- Liao, S. J., (1992), *On the Proposed Homotopy Analysis Techniques for Nonlinear Problems and its Application*, PhD Thesis, Jiao Tong University, Shanghai.

31- Liao, S. J. and K. F. Cheung, (2003), *Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water*, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 45, p. 105–116.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2025-06-26]

[DOR: 20.1001.1.17357608.1393.10.19.1.4]