استفاده از روش ترکیب تصادفی داده‌های نویزدار ناقص در پایش سلامت سازه‌ها به کمک تابع پاسخ فرکانسی

عطاء اله قره چائی [۱*]

[۱] عضو هیات علمی دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، a.gharechae@cmu.ac.ir

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۰۴
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۱/۲۰
تاریخ انتشار مقاله: ۱۴۰۳/۰۱/۲۰

کلمات کلیدی:
تابع پاسخ فرکانسی
نویز
یافتن خرابی
دکل برق فشار قوی

چکیده

پایش سلامت و عیب‌یابی سازه‌ها همواره یکی از دغدغه‌های مهندسین و پژوهشگران بوده است. در این بین، برخی از سازه‌ها دارای اهمیت حیاتی در سطح ملی کشورها هستند و باید سلامت آنها مورد ارزیابی دوره‌ای قرار گیرد. در پایش سلامت، از داده‌های اندازه‌گیری میدانی از سازه موجود برای یافتن محل و میزان خرابی‌ها استفاده می‌شود. داده‌های میدانی با نصب تجهیزات اندازه‌گیری در تعداد محدودی از درجات آزادی سازه جمع‌آوری می‌شوند. این داده‌ها همواره با درصدی خطا و یا اصطلاحاً نویز همراه هستند. در این پژوهش توانایی روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری در عیب‌یابی سازه به کمک تابع پاسخ فرکانسی مورد ارزیابی قرار گرفته است. برای این منظور، روش توسعه داده شده بر روی یک دکل انتقال برق فشار قوی در سناریوهای مختلف خرابی اعمال شد. نتایج، توانایی بالای این روش در پیش‌بینی میزان خرابی سازه در حضور داده‌های نویزدار را نشان می‌دهد. هنگامی که مقدار نویز کمتر از ۵٪ است، نتایج روش فوق کاملاً منطبق با روش‌های مرسوم قبلی است. از سوی دیگر، وقتی تا ۳۵٪ نویز در کمتر از ۵۰٪ داده‌ها پخش شده است، روش‌های مرسوم در پیش‌بینی میزان و موقعیت خرابی‌ها با شکست مواجه می‌شوند، در حالیکه روش حاضر با دقت بالایی موقعیت و میزان خرابی‌ها را تشخیص می‌دهد. مثال‌های عددی با استفاده از داده‌های آلوده به نویز تأیید می‌کنند که روش پیشنهادی می‌تواند در تمام روش‌های تشخیص آسیب در سازه‌ها استفاده شود.

Utilizing the method of random composition of incomplete noisy data in the health monitoring of structures using the frequency response function

Ataollah Gharechae[1*]

[1]*Faculty member of Chabahar Maritime University, a.gharechae@cmu.ac.ir*

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 25 Dec 2023
Accepted: 08 Apr 2024
Available online: 08 Apr 2024

Keywords:
Frequency Response Function
Noise
Damage Detection
High Voltage Power Tower

ABSTRACT

Health monitoring and damage detection of structures have always been one of the concerns of engineers and researchers. In the meantime, some structures are of vital importance at the national level of countries and their health should be evaluated periodically. In structural health monitoring, field measurement data of the existing structure is used to find the location and extent of failures. Field data are collected by installing measuring equipment in a limited number of structural degrees of freedom. These data are always associated with a percentage of error or noise. In this research, the ability of the random composition of measurement data in structural damage detection has been evaluated using the frequency response function. For this purpose, the developed method was applied to a high-voltage power transmission tower in different damage scenarios. The results show the high ability of this method to predict

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

the amount and location of the damage in the presence of noisy data. When the amount of noise in the data is less than 5%, the results of the above method are completely consistent with the previous conventional methods. When up to 35% of the noise is spread in less than 50% of the data, while conventional methods fail to predict the amount and position of the damages, the present method detects the position and amount of damage with high accuracy. Numerical examples using noisy data confirm that the proposed method can be used in all methods of damage detection in structures.

۱ – مقدمه

وضعیت سلامت سازه‌های مهندسی بستگی به درجه اهمیت و حساسیت آنها باید مورد ارزیابی دوره‌ای قرار گیرند. برخی از عیوب سازه، مانند خوردگی، کاهش ضخامت و یا تغییرشکل‌های بزرگ، با بازرسی چشمی و یا اندازه‌گیری با استفاده از تجهیزات ارزان قیمت قابل تشخیص هستند. اما برخی دیگر از عیوب، مانند خستگی دارای شواهد ظاهری ملموس نیستند و برای تشخیص آنها باید از روش‌های پیشرفته مبتنی بر آخرین دستاوردهای علمی استفاده کرد. شکست و یا گسیختگی در سازه‌های مهندسی مهمی مانند برج‌های بزرگ، پل‌ها، دکل‌های برق فشار قوی، جرثقیل‌های تخلیه و بارگیری (شکل ۱)، سکوهای نفتی و مانند آن می‌تواند باعث خسارت‌های جانی، زیست‌محیطی و یا اقتصادی کلان شود، و یا باعث اختلال در چرخه اقتصاد در مقیاس ملی و یا جهانی گردد. بنابراین، تشخیص به موقع این عیوب و رفع آنها از اهمیت بسزائی برخوردار است.



شکل ۱: یک جرثقیل بندری در حال تخلیه بار کانتینر.

روش‌های مختلفی برای تشخیص آسیب در سازه‌ها[1]وجود دارد. استفاده از ویژگی‌های ارتعاشی از جمله تابع پاسخ فرکانسی، فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها، انحنای شکل مودها، انعطاف‌پذیری مودال، انرژی کرنش مودال و غیره از روش‌های رایج برای تشخیص وقوع آسیب در سازه‌ها هستند [۱-۳]. برای مثال، روش به روزرسانی مدل المان محدود با داده‌های کرنش ناقص با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی[2] توسط اسفندیاری و همکاران پیشنهاد شده است [۴]. ایزدی و اسفندیاری آسیب‌های سازه‌ای را با روش به‌روزرسانی مدل المان محدود مبتنی بر حساسیت با استفاده از داده‌های تابع قابلیت انتقال را شناسایی کردند [۵].

مدل‌های شناسایی آسیب سازه‌ای متعددی بر اساس رگرسیون بین پاسخ‌های داخلی و پاسخ‌های مرزی عناصر خرپایی توسط یائو و همکاران استخراج شده‌اند [۶]. تشخیص آسیب بر اساس فرکانس‌های طبیعی اندازه‌گیری شده و شکل‌های مود مربوطه توسط توماسزوسکا بررسی شده است [۷]. وی از انحنای شکل مود و انعطاف‌پذیری سازه برای تشخیص آسیب در سازه استفاده کرد.

روش‌های به‌روزرسانی مدل و یا عیب‌یابی درسازه اغلب زمانی که تفاوت بین مدل تحلیلی و سازه واقعی خیلی زیاد نباشد، به خوبی کار می‌کنند. با این وجود، دقت آنها به حساسیت آنها به نویز و تعداد و مکان اندازه‌گیری‌ها بستگی دارد. از سوی دیگر، در اغلب مدل‌ها، در زمان بسط معادلات حاکم، از تقریبات و ساده‌سازی استفاده می‌شود. در اینگونه مدل‌ها، اگر داده‌های اندازه‌گیری دارای دقت بالا باشند در برخی از سناریوهای خرابی جواب قابل قبول می‌دهند و در برخی دیگر علی‌الخصوص اگر دامنه خرابی سازه و یا المان‌ها بالا باشد و یا به عبارتی ساختار سازه آسیب دیده با سازه اولیه خیلی متفاوت باشد، قادر به پیش‌بینی دقیق میزان و محل وقوع خرابی‌ها نیستند. از سوی دیگر، در استخراج برخی از مدل‌های تشخیص خرابی مانند روش تابع پاسخ فرکانسی، دقت معادلات حاکم بالا است. به عبارتی، اگر داده‌های اندازه‌گیری دارای دقت لازم باشند مدل به خوبی می‌تواند موقعیت و میزان خرابی المان‌ها را پیش‌بینی کند.

چه مدل از معادلات تقریبی ریاضی استفاده کند و چه از معادلات دقیق، کماکان هنوز دو چالشی اساسی وجود دارد. اول اینکه به دلیل محدودیت دسترسی به تمام نقاط سازه، محدودیت دقت و تعداد تجهیزات مورد نیاز و دلایل اقتصادی در عمل پایش سلامت سازه باید با تعداد محدودی داده صورت گیرد. و دوم اینکه همین داده‌های اندازه‌گیری شده نیز ممکن است دارای دقت لازم نباشند. می‌توان برخی از داده‌های اندازه‌گیری شده را با مقایسه با سایر داده‌ها به عنوان داده‌های پرت تلقی کرد و آنها را در محاسبات لحاظ نکرد، اما تصمیم‌گیری در خصوص این مورد به سادگی مقدور نیست، فرایندی زمان‌بر است و نیاز به تخصص، تجربه و مهارت بالا

[1] Damage Detection

[2] Frequency Response Function(FRF)

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

دارد. می‌توان قبل از نصب تجهیزات اندازه‌گیری بر روی سازه، با شبیه سازی‌های کامپیوتری موقعیت بهینه نصب تجهیزات اندازه‌گیری را تعیین نمود؛ تا سنسورها در مکان‌هایی نصب گردند که سازه بیشترین پاسخ به تحریک‌های خارجی را دارد [۸]. علیرغم انتخاب بهترین مکان برای سنسورها، به دلایل متعددی مانند خطای ذاتی سنسورها، خطاهای تجهیزات و خطاهای انسانی و ماهیت کار اندازه‌گیری، داده‌های نویزداری وارد محاسبات شوند که بطور کلی برای نتیجه قضاوت ما بر وضعیت سلامتی سازه تاثیر بگذارد. از آنجا که تشخیص داده‌های معیوب از داده‌های قابل اعتماد به سادگی امکان‌پذیر نیست، این مقاله به دنبال پیاده‌سازی روشی برای چیره‌شدن بر این چالش است. در ذیل برخی از پژوهش‌های صورت گرفته در خصوص کاهش تاثیر داده‌های نویزدار را مرور می‌کنیم.

نی و همکاران قرارگیری بهینه سنسورها را جهت شناسایی فرکانس و شکل مود سازه‌های فضایی بزرگ را به کمک الگوریتم ژنتیک بررسی کردند [۹]. یانگ و کیا [۱۰] بر اساس روش مستقل مؤثر و رویکرد تراکم دینامیکی، یک روش قرار دادن سنسور با استفاده از یک الگوریتم ژنتیک مرتب‌سازی غیرغالب اصلاح‌شده پیشنهاد دادند که با یک شاخص توزیع جدید ارزیابی شد.

یانگ و همکاران از سیگنال‌های انرژی دریافتی توسط حسگرها به عنوان اصل بهینه‌سازی مکان سنسور و الگوریتم ژنتیک (GA) برای بهینه‌سازی قرارگیری حسگرهای نصب شده بر روی سازه خرپا استفاده کردند. به منظور دستیابی به نتایج بهینه‌سازی بهتر و اجتناب از مقادیر متغیر یکسان در فرد پس از تکامل ژنتیکی، در مقایسه با محدودیت‌های سنتی اعمال شده بر الگوریتم ژنتیک، آنها از درجه افزونگی اطلاعات بین هر نقطه نصب به عنوان شرط محدودیت استفاده کردند [۱۱].

کامر [۱۲]، روشی به نام استقلال مؤثر ([3]EfI) برای قرار دادن تعداد کمی از حسگرها برای شناسایی شکل مود سازه‌های بزرگ ارائه کرد. این روش توسط یائو و همکاران برای مقایسه با روش الگوریتم ژنتیک نیز استفاده شده است [۱۳]. او به این نتیجه رسید که مکان حسگر به دست آمده توسط الگوریتم ژنتیک در مقایسه با روش EfI دارای دقت بالاتری است. رینیر و ابوکندیل [۱۴] دو روش پیشنهاد کردند: روش اول مبتنی بر به حداقل رساندن اثر نویز در الگوریتم حداقل مربعات است و روش دوم مبتنی بر گرامیان قابل مشاهده است، زیرا کوچکترین مقادیر ویژه گرامین مشاهده‌پذیر ضعیف‌ترین حالت اطلاعات را نشان می‌دهد. کسیو و هاوو [۱۵] مفهوم جدیدی از قابلیت اندازه‌گیری آسیب را بر اساس دو عامل حساسیت، یعنی حساسیت یک بردار باقیمانده به آسیب ساختاری، و حساسیت آسیب به نویز اندازه‌گیری، معرفی کردند. ترندافیلوا [۱۶] از اطلاعات متقابل برای یافتن فاصله بهینه بین نقاط اندازه‌گیری استفاده کرد تا نه اطلاعاتی از بین برود و نه اطلاعاتی دو برابر شود. این روش، تکنیکی برای تعیین پیکربندی نقطه اندازه‌گیری بر اساس فاصله بهینه بین سنسورها است. تکنیک استفاده شده توسط اسکلتون و لی [۱۷] که طراحی اقتصادی نامیده می‌شود، کل دقت مورد نیاز را به حداقل می‌رساند و در عین حال محدودیت‌های عملکرد سیستم را برآورده می‌کند.

کایوک و زیمرمن [۱۸] نظریه اغتشاش با رتبه حداقل ([4]MRPT) را به عنوان یک رویکرد محاسباتی کارا برای بررسی خرابی در سازه‌ها پیشنهاد کردند. بر اساس این نظریه، به روزرسانی هر ماتریس ویژگی دارای حداقل رتبه است و برابر با تعداد مودهای اندازه‌گیری شده است که سازه صدمه دیده باید با آن مطابقت داشته باشد. آنها از مفهوم MRPT برای تعیین میزان آسیب بر روی خواص جرمی سازه‌های بدون میرایی و میرا استفاده کردند (همچنین مرجع [۱۹] نیز ملاحظه شود).

قره چائی و کتابداری [۲۰] یک روش ساده ولی موثر برای مبارزه با داده‌های نویزدار پیشنهاد کردند. در این مقاله روش آنها را روش *ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری* می‌نامیم. این روش کارائی خود را در عیب‌یابی یک سازه خرپا نشان داد. آنها روش خود را بر روی مدلی که از داده‌های شکل مود و فرکانس‌های طبیعی سازه برای پیش‌بینی خرابی استفاده می‌کرد، اعمال کردند. مزیت اصلی این روش آن است که به راحتی قابل پیاده‌سازی در انواع روش‌های پایش سلامت سازه است و برای فهم و پیاده‌سازی آن نیاز به الگورتیم‌های پیچیده و یا استخراج معادلات جدید نیست. در این روش، داده‌های اندازه‌گیری شده بصورت تصادفی در ترکیب‌های مختلف چیده می‌شوند. هر گروه از داده‌ها به صورت مستقل خرابی سازه را پیش‌بینی می‌کنند. خرابی‌های پیش‌بینی شده از نظر حیث و توزیع با هم مقایسه می‌شوند. مشاهده می‌گردد، آن گروه از ترکیب داده‌ها که مجموع خرابی کمتری محاسبه کرده‌اند، دارای دقت بالاتری نیز هستند. از نقطه نظر مبانی فیزیکی می‌توان روش آنها را بازتاب عملی از تئوری حداقل اغتشاش که توسط کایوک و زیمرمن [۱۸, ۱۹] بیان شده، تفسیر کرد. در این روش در هر سناریو انتخابی از داده‌های اندازه‌گیری، موردی معتبر است که حداقل خسارت کل را پیش‌بینی کند. برای اجرای این ایده، مجموع خرابی‌های پیش بینی شده توسط سناریوهای مختلف ترکیب داده‌ها به صورت صعودی مرتب می‌شوند، دو یا چند سناریوی اول که کمترین آسیب را برآورد کرده‌اند از نظر مکان آسیب و میزان آن بسیار شبیه به یکدیگر هستند، که میانگین آنها می‌تواند بیانگر وضعیت سازه آسیب دیده باشد.

[3] Effective Independence

[4] Minimum Rank Perturbation Theory

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

مزیت دیگر روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری آن است که داده‌های نویزدار به خصوص زمانی که خطاها در بخشی از داده‌ها تجمع کرده‌اند حذف می‌شوند، در صورتیکه روش‌های مرسوم بدون توجه به این نکته، تمام داده‌ها را وارد محاسبات می‌نماید که باعث عدم کاهش دقت مربوطه می‌گردد. از مزیت دیگر آن می‌توان گفت، در روش‌های مرسوم معیار ثانویه‌ای برای صحه‌گذاری نتایج وجود ندارد. اما در این روش مشاهده می‌شود که دو یا چند سناریو محل و میزان آسیب یکسانی را پیش‌بینی کرده‌اند و می‌توانند به عنوان معیاری قدرتمند برای تأیید نتیجه روش پایش سلامت سازه عمل کنند.

این نکته را نیز نباید از نظر دور داشت که در روش‌هایی از پایش سلامت سازه مانند شکل مودها و فرکانس طبیعی، که ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری قبلاً بر روی آنها اعمال شد، معادلات حاکم دارای تقریب ریاضی هستند و به عبارتی در ذات معادلات حاکم خطا وجود دارد. بنابراین، این راهکار در برخی از ترکیب داده‌ها جواب‌های بهتری می‌دهند. اما، در برخی از روش‌های دیگر مانند تابع پاسخ فرکانسی معادلات حاکم دقیق هستند و فقط کافی است داده‌های ورودی به این معادلات دارای دقت کافی باشند. یعنی این معادلات وقتی که داده‌ها فاقد نویز هستند با دقت بالایی مکان و میزان خرابی سازه را پیش‌بینی می‌کنند. بنابراین، مقابله با داده‌های نویزدار هنوز به عنوان یک چالش باقیمانده است. در این مقاله برآنیم کارائی روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری در پایش سلامت سازه به کمک داده‌های تابع پاسخ فرکانسی را نیز ارزیابی کنیم. نتایج کارائی این روش را به خصوص زمانیکه خطاها فقط در بخشی از داده‌ها تجمع پیدا کرده‌اند را نشان می‌دهد.

از این روش می‌توان در ارزیابی سلامت سازه‌های حساس دریایی علی الخصوص سازه های خرپایی و یا قاب‌ها استفاده کرد. سازه‌هایی مانند، جرثقیل‌های تخلیه و بارگیری (شکل ۱)، اسکله‌ها، دلفین‌های مهار[5] برج‌های مخابراتی، داک‌های شناور و سکوهای حفاری از این دسته هستند.

ادامه مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، معادلات حاکم بر پایش سلامت سازه به کمک تابع پاسخ فرکانسی بیان می‌شوند. در بخش سوم، نتایج روش فوق برای یک سازه نمونه با نتایج حالتی که تمام داده‌های اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند در حالت‌های مختلف خرابی، با در نظر گرفتن داده‌های بدون نویز و داده‌های با درصدهای مختلف نویز با هم مقایسه می‌شوند و در بخش چهارم نتایج مهم پژوهش جمع‌بندی می‌گردند.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- استخراج معادله حساسیت

معادله ارتعاش یک سیستم با n درجه آزادی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \qquad (۱)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{K}$، $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{C}$ به ترتیب ماتریس‌های سختی، جرم و میرایی هستند. $\boldsymbol{f}(t)$ بردار نیروی وارده و $\boldsymbol{x}(t)$ بردار جابجایی است. با فرض اعمال بار هارمونیک، نیروی وارده و جابجایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{F}(\omega)\exp(j\omega t)\,; \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(\omega)\exp(j\omega t) \qquad (۲)$$

که در آن ω فرکانس بار اعمالی و $j = \sqrt{-1}$ است. با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$(-\omega^2\boldsymbol{M} + j\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{X}(\omega)\exp(j\omega t) = \boldsymbol{F}(\omega)\exp(j\omega t) \qquad (۳)$$

و با تعریف

$$\boldsymbol{B}(\omega) = -\omega^2\boldsymbol{M} + j\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K} \qquad (۴)$$

به عنوان ماتریس امپدانس سیستم و یا به طور ساده ماتریس سیستم معادله (۳) به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{B}(\omega)\boldsymbol{X}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega) \qquad (۵)$$

حال می‌توان پاسخ سازه را به صورت ذیل بیان کرد:

$$\boldsymbol{X}(\omega) = \boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{F}(\omega) \qquad (۶)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{H}(\omega)$ تابع پاسخ فرکانسی است و به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{B}(\omega)^{-1} = (-\omega^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{j}\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})^{-1} \qquad (۷)$$

در سازه آسیب دیده به علت تغییر پارامترهای سازه‌ای نسبت به سازه سالم، ماتریس‌های سختی، جرم و میرایی به میزان $\delta\boldsymbol{K}$، $\delta\boldsymbol{M}$ و $\delta\boldsymbol{C}$ تغییر خواهد کرد. بنابراین، معادله حرکت به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

$$(-\omega^2(\boldsymbol{M}+\delta\boldsymbol{M}) + j\omega(\boldsymbol{C}+\delta\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{K})\big(\boldsymbol{X}(\omega) + \delta\boldsymbol{X}(\omega)\big) = \boldsymbol{F}(\omega) \qquad (۸)$$

با بازنویسی مجدد معادله داریم:

$$B_d(\omega)\delta\boldsymbol{X}(\omega) + \boldsymbol{B}(\omega)\boldsymbol{X}(\omega) + (\delta\boldsymbol{K} + j\omega\delta\boldsymbol{C} - \omega^2\delta\boldsymbol{M})\boldsymbol{X}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega) \qquad (۹)$$

با در نظر گرفتن معادله (۶) و بسط معادله (۹) داریم:

$$B_d(\omega)\delta\boldsymbol{X}(\omega) = -(\delta\boldsymbol{K} + j\omega\delta\boldsymbol{C} - \omega^2\delta\boldsymbol{M})\boldsymbol{X}(\omega) \qquad (۱۰)$$

[5] Mooring dolphins

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

بنابراین، تغییر در پاسخ فرکانسی سازه تحت یک بار هارمونیک به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\delta \boldsymbol{X}(\omega) = -\boldsymbol{H}_d(\omega)(\delta \boldsymbol{K} + j\omega\delta \boldsymbol{C} - \omega^2 \delta \boldsymbol{M})\boldsymbol{X}(\omega) \quad (۱۱)$$

که در آن $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ تابع پاسخ فرکانسی سازه آسیب دیده است که از داده‌های اندازه‌گیری شده استخراج می‌شود. در این معادله، هر کدام از ستون‌های $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ پاسخ سازه به یک بار واحد را نشان می‌دهد. اگر بار وارده به سازه را واحد در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\delta \boldsymbol{H}(\omega) = -\boldsymbol{H}_d(\omega)\delta \boldsymbol{B}(\omega)\boldsymbol{H}(\omega) \quad (۱۲)$$

با صرفنظر از میرائی داریم،

$$\delta \boldsymbol{B}(\omega) = \delta \boldsymbol{K} - \omega^2 \delta \boldsymbol{M} \quad (۱۳)$$

و اگر از تغییرات جرم سازه آسیب دیده نیز صرفنظر کنیم، داریم:

$$\delta \boldsymbol{B}(\omega) = \delta \boldsymbol{K} \quad (۱۴)$$

بنابراین، معادله (۱۲) به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

$$\delta \boldsymbol{H}(\omega) = -\boldsymbol{H}_d(\omega)\delta \boldsymbol{K}(\omega)\boldsymbol{H}(\omega) \quad (۱۵)$$

و برای ستون j ام می‌توان نوشت:

$$\delta \boldsymbol{H}_j(\omega) = -\boldsymbol{H}_d(\omega)\delta \boldsymbol{B}(\omega)\boldsymbol{H}_j(\omega) \quad (۱۶)$$

که j محل اعمال نیروی تحریک در درجه آزادی مربوطه است.

بنابراین،

$$\delta \boldsymbol{H}_j(\omega) = -\boldsymbol{H}_d(\omega)\overline{\boldsymbol{A}}\delta \boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{H}_j(\omega) \quad (۱۷)$$

و یا:

$$\delta \boldsymbol{H}_j(\omega) = -\boldsymbol{H}_d(\omega)\overline{\boldsymbol{A}}\ \mathrm{diag}\ (\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{H}_j(\omega))\delta \boldsymbol{P} \quad (۱۸)$$

برای بیان معادله به فرم فوق از رابطه $\delta \boldsymbol{K} = \overline{\boldsymbol{A}}\delta \boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}$ بهره بردیم. که در آن، $\delta \boldsymbol{P}$ یک ماتریس متقارن قطری با تعداد عناصر برابر با تعداد المان‌های سازه است که مقدار عناصر آن در بازه $[-1,1]$ قرار دارند. به عنوان مثال $\boldsymbol{P}(j,j) = -0.2$ به مفهوم آن است که المان شماره j در سازه آسیب دیده در مقایسه با سازه سالم به میزان ۲۰٪ دچار خرابی شده است.

معادله (۱۸) معادله حساسیت در پایش سلامت سازه به روش تابع پاسخ فرکانسی است. در این رابطه ماتریس $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ باید از پاسخ سازه آسیب دیده به بارگذاری در درجات مختلف آزادی استخراج گردد. برای محاسبه $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ از رابطه ذیل نیز می‌توان استفاده نمود.

$$\boldsymbol{H}_d(\omega) \cong \sum_{i=1}^{nm} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\Omega_{id}^2 - \omega^2 + 2j\xi_{id}\Omega_{id}\omega} + \sum_{i=nm+1}^{n} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\Omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\Omega_i\omega} \quad (۱۹)$$

که در آن، ϕ_i، Ω_{id} و ξ_{id} به ترتیب بردار شکل مود، فرکانس طبیعی و ضریب میرائی سازه آسیب دیده در مود i است. همچنین، Ω_i و ξ_i به ترتیب فرکانس طبیعی و ضریب میرائی سازه سالم در مود i است. nm تعداد فرکانس‌های اندازه‌گیری شده و n تعداد کل فرکانس‌های طبیعی سازه است.

صرفنظر از اینکه $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ در آزمایش تجربی به چه روشی محاسبه شود، ما در این پژوهش، برای شبیه‌سازی خرابی مقدار آن را از رابطه ذیل بدست می‌آوریم:

$$\boldsymbol{H}_d(\omega) = (\boldsymbol{K_d} - \omega^2 \boldsymbol{M_d})^{-1} \quad (۲۰)$$

برای داشتن تابع پاسخ فرکانسی سازه آسیب دیده یعنی ماتریس $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ که در عمل با اندازه‌گیری میدانی تعیین می‌شود، از شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم. برای این منظور، تعدادی از المان‌های سازه سالم به صورت معیوب درنظر گرفته می‌شوند. یعنی درصدی از میزان سختی آنها کاهش داده می‌شود، سپس ماتریس‌های سختی و جرم این سازه محاسبه شده و با اعمال این مقادیر در معادله (۲۰) ماتریس تابع پاسخ فرکانسی $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ بدست می‌آید. در قدم بعدی، برای شبیه‌سازی نویز، در برخی از عناصر این ماتریس، خطای اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌شود. ماتریس حاصل به عنوان شبیه‌سازی از داده‌های میدانی سازه آسیب دیده، در معادله (۱۸) اعمال می‌گردد و به کمک آن، ماتریس میزان خرابی یعنی $\delta \boldsymbol{P}$ محاسبه می‌شود. در حالت ایده‌ال میزان خرابی محاسبه شده در این مرحله با خرابه اولیه درنظر گرفته شده برابر است. در بخش‌های بعدی نحوه توزیع نویز و نتایج حاصل به تفصیل شرح داده می‌شود.

۲-۲- روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری

به طور خلاصه، در روش حاضر که قبلاً در پژوهش قره چائی و کتابداری [۲۰] شرح داده شد، مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- داده‌های اندازه‌گیری به صورت تصادفی در چند ترکیب مختلف دسته بندی می‌شوند. برخی از داده‌ها می‌توانند در یک یا چند گروه قرار گیرند. ترجیحاً در صورت وجود داده کافی، تعداد داده موجود در هر دسته، از تعداد المان‌های سازه بیشتر در نظر گرفته می‌شود (یعنی تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد). در هر صورت تعداد ترکیب‌ها و تعداد داده‌های موجود در هر ترکیب با توجه به شرایط مساله و تنوع داده‌های موجود تنظیم می‌شود. هر چه تعداد ترکیب‌ها بیشتر باشد، به احتمال زیاد جواب یافت شده نیز دقیق‌تر است. داده‌های اندازه‌گیری می‌تواند داده‌های فرکانس، شکل مود، پاسخ فرکانسی و یا هر داده دیگری و یا هر ترکیبی از آنها باشد.

۲- با توجه به بند فوق برای هر ترکیب داده‌ها میزان خرابی به صورت مستقل محاسبه می‌شود.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

۳- مجموع قدرمطلق خرابی هر حالت از ترکیب داده‌ها محاسبه می‌شود.

۴- با توجه به بند فوق، حالت‌های خرابی پیش‌بینی شده از کمترین مجموع خرابی به بیشترین آن مرتب می‌شود.

۵- دو یا چند حالت خرابی که کمترین میزان خرابی را پیش‌بینی کرده‌اند، از حیث ترکیب و میزان خرابی نیز بسیار شبیه به هم هستند. خرابی نهایی سازه برابر با میانگین این حالات خرابی در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به معادلات حاکم در بخش ۲-۱ و انتخاب داده‌های اندازه گیری بر اساس بندهای ۵ گانه در بالا، یک کدکامپیوتری در نرم افزار Maple 2023 برای پایش سلامت سازه توسعه داده شد. در بخش بعدی، نتایج روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری را با نتایج روشی که از تمام داده‌ها بهره می‌برد مقایسه می‌شود.

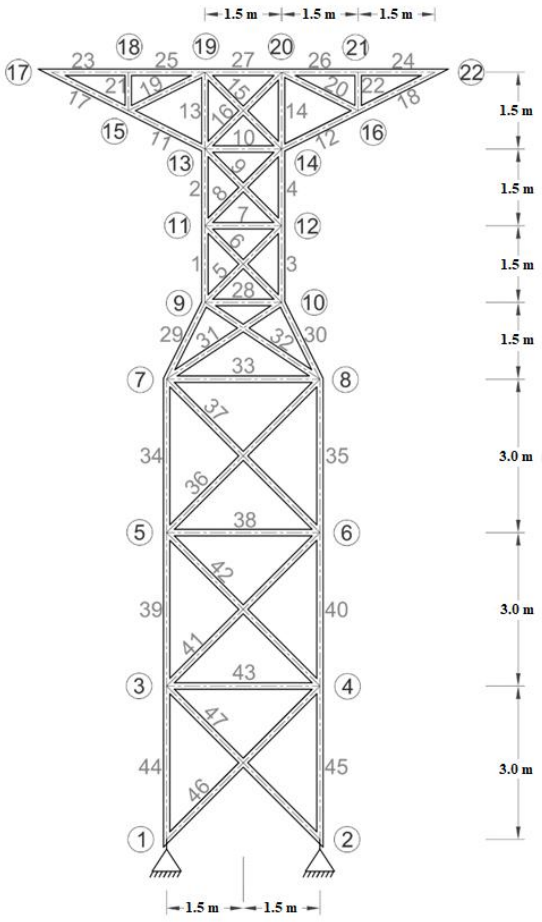
۳- نتایج

روش پیشنهاد شده در این پژوهش در بررسی خرابی در سازه یک دکل انتقال برق فشار قوی که سلامت سازه‌ای و ایمنی آن در سطح ملی کشورها دارای اهمیت حیاتی است مورد استفاده قرار می‌گیرد. جزئیات ابعاد این سازه خرپایی در شکل ۲ نشان داده شده است. این سازه شامل ۴۷ المان و ۲۲ گره است. خرپا از جنس فولاد و هندسه آن نسبت به محور قائم متقارن است. چگالی و مدول الاسیسیته آن به ترتیب $7900\ \mathrm{kg/m^3}$ و 200 GPa در نظر گرفته می‌شود.

برای ساده‌سازی، از تفاوت جرم سازه آسیب دیده و سازه سالم صرفنظر می‌شود، که با واقعیت فیزیکی نیز همخوانی دارد. برای شبیه‌سازی نویز در سناریوهای مختلف، مقدار آن به صورت یک توزیع تصادفی در ماتریس حساسیت $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ اعمال می‌شود.

برای حل مساله، ۷ حالت فرکانس تحریک به صورت تصادفی در محدوده کمترین و بیشترین فرکانس طبیعی سازه سالم انتخاب می‌شود. همچنین در هر بار حل مساله، ۲۰ نقطه اندازه‌گیری به صورت تصادفی، از بین ۴۰ درجه آزادی سازه انتخاب می‌شود. بنابراین در فرایند حل مساله روش قدیم یا همان روش مرسوم از ۱۴۰ داده اندازه‌گیری شده بهره می‌برد. ولی، در روش جدید ۳۰ ترکیب مختلف از این ۱۴۰ داده ساخته می‌شود. برای این منظور در هر ترکیب ۴ فرکانس مختلف از ۷ فرکانس موجود به همراه ۱۵ داده اندازه‌گیری از ۲۰ نقطه اندازه‌گیری انتخاب می‌شوند.

برای پخش نویز در داده‌ها بصورت ذیل اقدام می‌شود. برای این منظور دو پارامتر را در نظر می‌گیرم یکی میزان نویز و دوم درصد داده‌هایی که حاوی نویز هستند. برای مثال ۲۵٪ نویز در ۵۰٪ درصد داده‌ها به این مفهوم است، که در ۵۰٪ داده‌های ورودی، حداکثر و حداقل ۲۵٪ نویز به صورت یکنواخت و تصادفی پخش شده است.

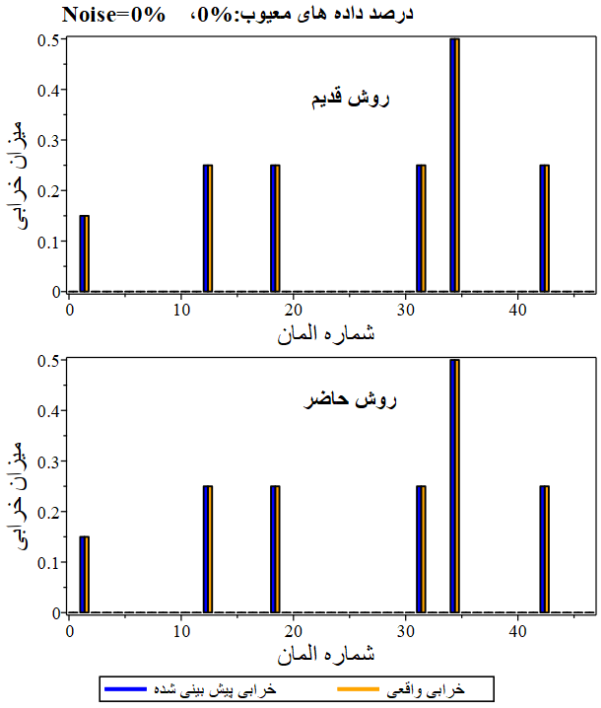


شکل ۲: نمای جانبی از یک دکل انتقال برق فشار قوی به عنوان خرپای مورد مطالعه

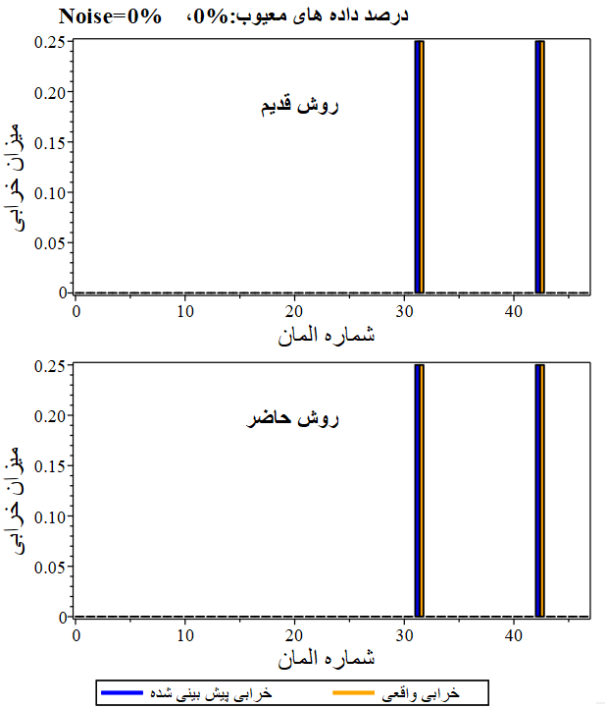
ابتدا توانایی روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری، شرح داده شده در این پژوهش، که ما آن را "روش حاضر" می‌نامیم با روش مرسوم که آن را "روش قدیم" نام‌گذاری می‌کنیم برای بررسی میزان و محل خرابی در سازه، برای داده‌های فاقد نویز با هم مقایسه می‌شود. نتایج در شکل ۳ تا شکل ۵ برای چندین ترکیب خرابی نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود هر دو روش توانسته‌اند موقعیت و میزان خرابی المان‌های مربوطه را با دقت بالا محاسبه نماید و نتایج آنها در تطابق کامل با هم هستند. علت این است که معادله حساسیت استخراج شده (معادله (۱۸)) از نظر ریاضی دقیق است و در صورتیکه ماتریس حساسیت $\boldsymbol{H}_d(\omega)$ نیز دقیق باشد نتایج پیش‌بینی خرابی نیز دقیق خواهد بود. بنابراین، باتوجه به اینکه ماتریس حساسیت از اطلاعات سازه آسیب دیده (معادله (۷)) استخراج شده است، دقیق است، نتایج در غیاب نویز نیز دقیق خواهد بود.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

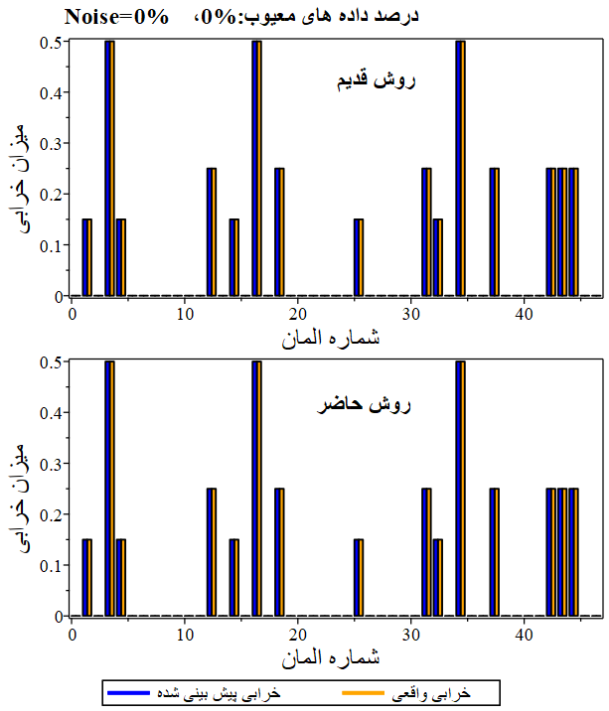
[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]



شکل ۳: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۶ المان با داده‌های بدون نویز.



شکل ۴: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۲ المان با داده‌های بدون نویز.

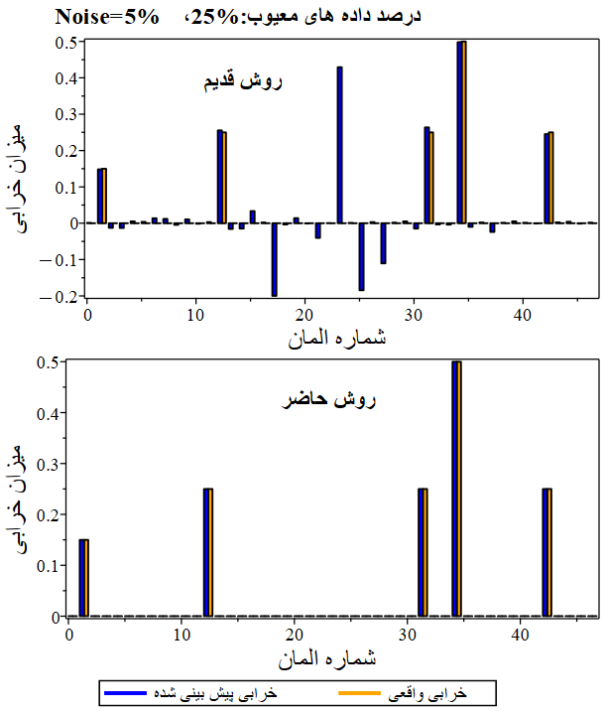


شکل ۵ : مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۱۲ المان با داده‌های بدون نویز.

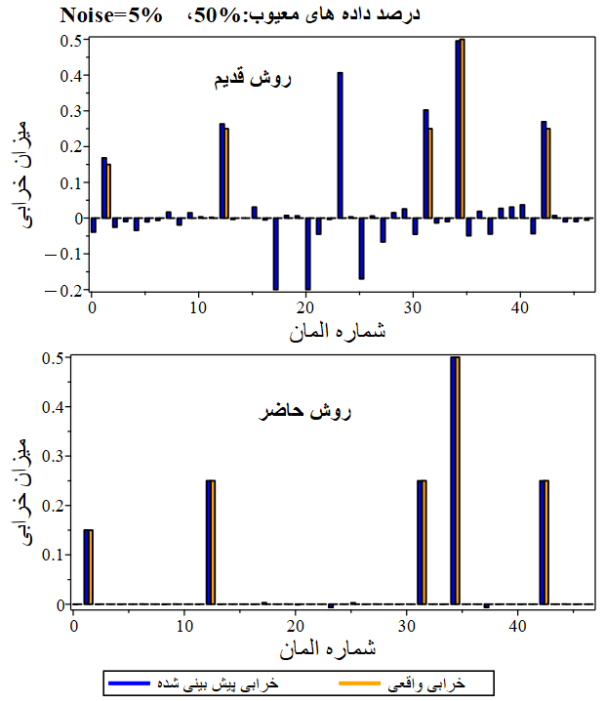
همانطور که پیشتر ذکر شد، توانایی روش فوق در مدیریت داده‌های حاوی نویز است. برای این منظور به صورت تصادفی در بخشی از داده‌ها، درصدی نویز را به صورت تصادفی پخش نموده و سپس آنالیز خرابی برای حالت قدیم و روش حاضر با هم مقایسه می‌شوند. نتایج در شکل ۶ تا شکل ۱۴ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش میزان و توزیع گستره نویز در داده‌های ورودی، خطای روش قدیم به سرعت افزایش می‌یابد در صورتیکه روش حاضر مقاومت بسیار بالایی در مقابل نویز دارد و می‌تواند حتی در مقابل دامنه گسترده‌ای از نویزها نتایج قابل اعتمادی ارائه دهد. در هر مرحله اجرای برنامه، کل فرایند پخش نویز در داده ها، بصورت تصادفی توسط برنامه کامپیوتری نوشته شده انجام شده است. بنابراین، هر مورد خرابی می‌بایست مستقلاً مورد بررسی قرار گیرد. نتایج شکل ۷ و شکل ۸ نشان می‌دهد، حتی با توزیع نویز در کل داده‌ها نتایج حاصل از روش فوق دارای دقت بالایی است.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

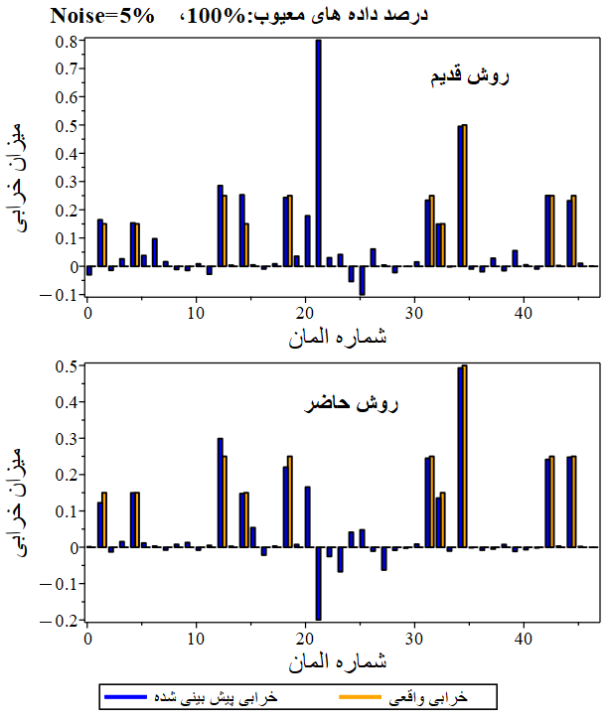
[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]



شکل ۶: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۶ المان با داده‌های نویزدار.

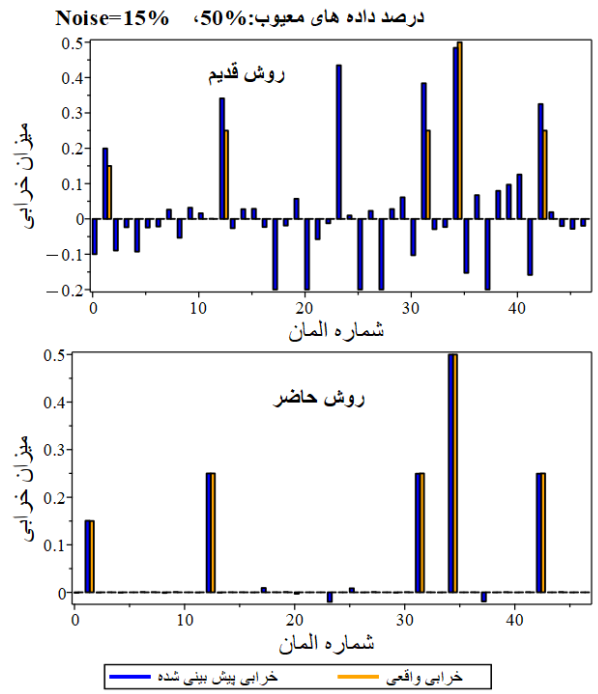


شکل ۷: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۵ المان با داده‌های نویزدار.



شکل ۸: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۱۰ المان با داده‌های نویزدار.

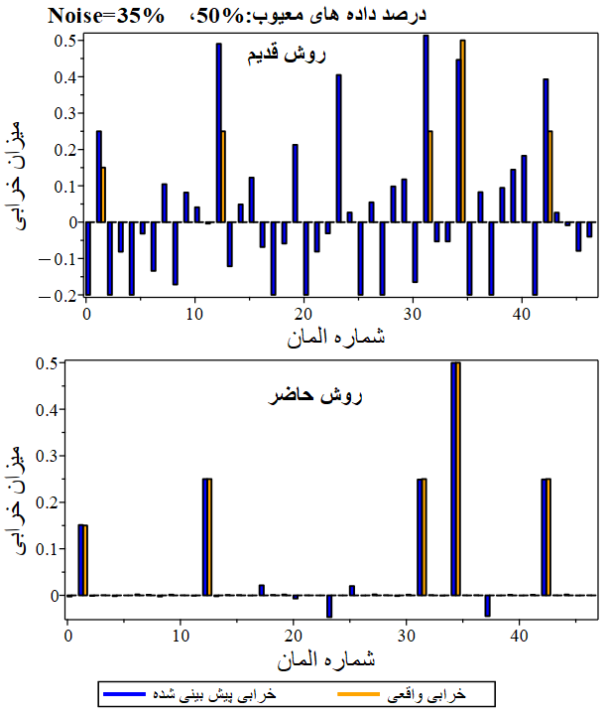
نتایج شکل ۹ گویای مثال دیگری از توانمندی روش حاضر در مدیریت داده‌های نویزدار است، در حالیکه روش قدیم در الگو و توزیع خرابی‌ها کاملاً با شکست مواجه شده است، لیکن روش حاضر توانسته است علیرغم وجود ۱۵٪ نویز در ۵۰٪ داده‌ها موقعیت و میزان خرابی را با دقت بالایی پیش‌بینی کند. در شکل ۱۰ توزیع نویز به ۳۵٪ درصد در ۵۰٪ داده‌ها رسیده است. کماکان روش حاضر دارای پایداری مناسبی در حل مساله است.



[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

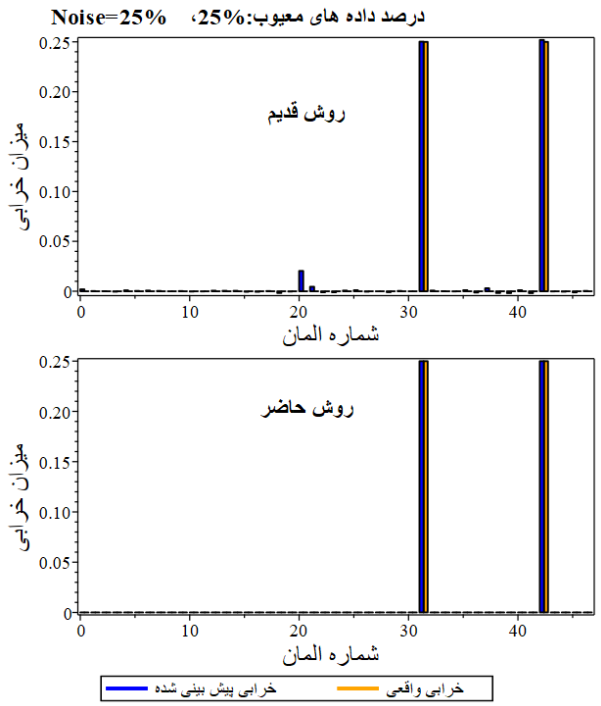
[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

شکل ۹: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۵ المان با داده‌های نویزدار.

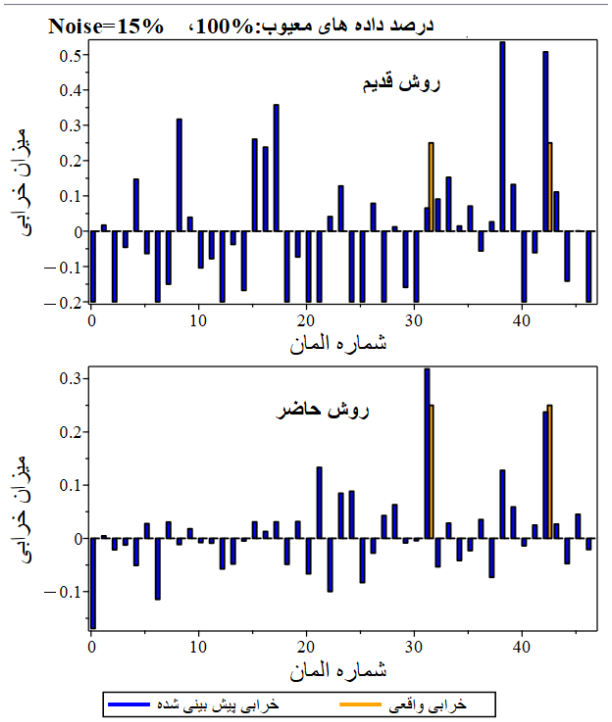


شکل ۱۰: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۵ المان با داده‌های نویزدار شدید.

شکل ۱۱ مثالی از ۲۵٪ نویز در ۲۵٪ داده‌های ورودی است، روش حاضر توانسته است با دقت کامل موقعیت و میزان خرابی را در سازه پیش‌بینی کند. در شکل ۱۲ با وجود اینکه تمام داده‌ها آلوده به ۱۵٪ نویز هستند، ولی روش حاضر توانسته است تا حدودی الگوی قابل قبولی از توزیع خرابی در سازه را بیان کند.



شکل ۱۱: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۲ المان با داده‌های نویزدار.

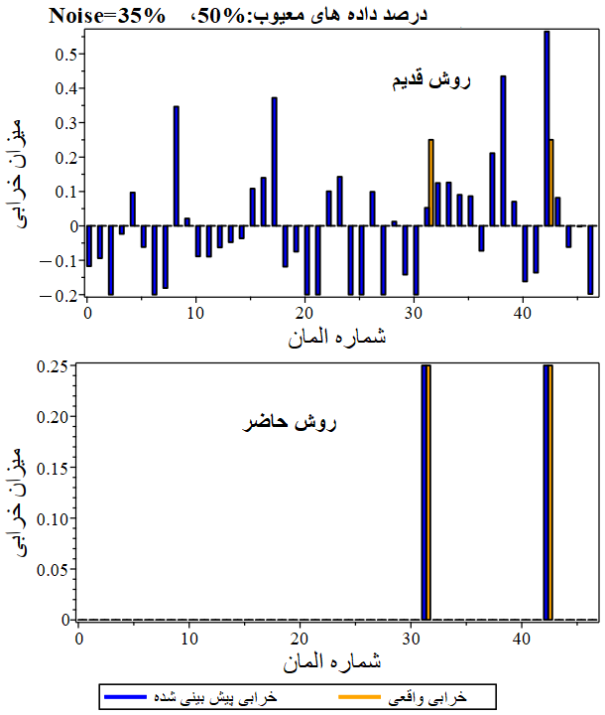


شکل ۱۲: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۲ المان با توزیع ۱۵٪ نویز در تمام داده‌ها.

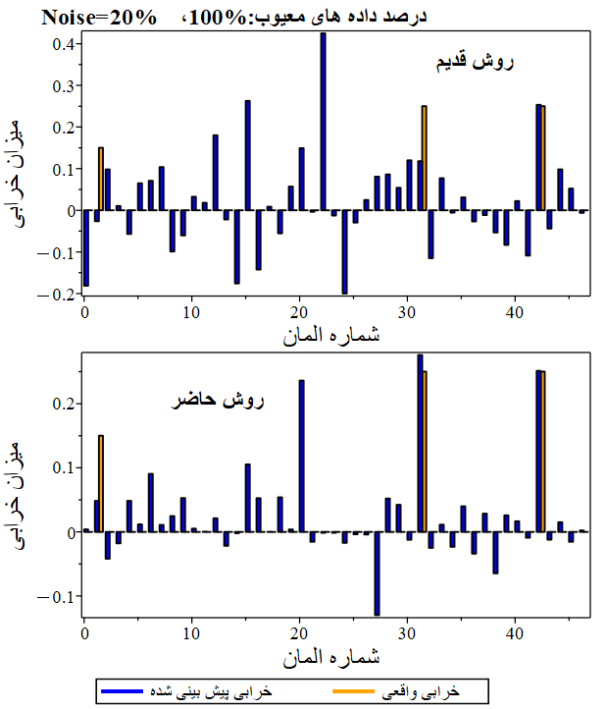
نتایج شکل ۱۳ و شکل‌های قبل گویای این واقعیت است، هر گاه حداقل ۵۰٪ درصد داده‌ها دارای دقت لازم باشند، روش حاضر به طور مناسبی می‌تواند موقعیت و میزان خرابی در المان‌ها را برآورد کند. ولی فقط زمانیکه تقریباً تمام داده‌ها آلوده به نویز بالا هستند، دقت روش فوق کاهش می‌یابد. ولی کماکان دقت آن از روش مرسوم بسیار بهتر است (شکل ۱۳).

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]



شکل ۱۳: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۲ المان با توزیع ۳۵٪ نویز در ۵۰٪ داده‌ها.



شکل ۱۴: مقایسه نتایج روش حاضر و روش مرسوم برای حالت خرابی ۳ المان با توزیع ۲۰٪ نویز در تمام داده‌ها.

۴- نتیجه گیری:

در پایش سلامت سازه‌ها و عیب یابی آنها، همواره از داده‌های اندازه‌گیری میدانی برای یافتن خرابی در سازه موجود و یا به روزرسانی مدل‌های عددی استفاده می‌شود. داده‌های میدانی با نصب سنسورهای شتاب سنج و یا سایر تجهیزات اندازه‌گیری در تعداد محدودی از درجات آزادی سازه اندازه‌گیری می‌شود. این اندازه‌گیری‌ها همواره با درصدی خطا و یا اصطلاحاً نویز همراه هستند. علی الخصوص به خاطر محدودیت و یا ایرادت فنی برخی سنسورها و تجهیزات اندازه‌گیری، خطاها عموماً در بخشی از داده‌های اندازه‌گیری تمرکز یافته‌اند.

در این پژوهش توانایی روش ترکیب تصادفی داده‌های اندازه‌گیری در پایش سلامت سازه‌ها با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی مورد ارزیابی قرار گرفت. برای بررسی موضوع، روش توسعه داده شده بر روی یک دکل انتقال برق فشار قوی که به صورت خرپا در نظر گرفته شده بود در سناریوهای مختلف خرابی اعمال شد. نتایج توانایی بالای این روش در پیش‌بینی میزان خرابی سازه در حضور داده‌های نویزدار را نشان می‌دهد. از اهم یافته‌های پژوهش موارد ذیل را می‌توان برشمرد:

۱- در غیاب نویز، روش حاضر دقیقاً توانست محل وقوع خرابی را به کمک تابع پاسخ فرکانسی پیش‌بینی کند و نتایج آن در همخوانی خوبی با نتایج روش‌های قبلی است.

۲- هنگامی که نویز در کل داده‌ها پخش شده است، نتایج روش حاضر از نظر موقعیت و میزان خرابی المان‌ها نسبت به روش مرسوم دقت بالاتری دارد.

۳- هنگامی که تا ۳۵٪ نویز در کمتر از ۵۰٪ داده‌ها پخش شده است، در حالیکه روش‌های مرسوم در پیش‌بینی میزان و موقعیت خرابی المان‌ها با شکست مواجه می‌شود، روش حاضر با دقت بالایی موقعیت و میزان خرابی‌ها را تشخیص می‌دهد.

با توجه به یافته‌های پژوهش، روش حاضر می‌تواند به عنوان روشی کارآمد در مدیریت داده‌های نویزدار در پایش سلامت سازه‌ها مورد استفاده قرار گیرد و نباید کاربرد آن به استفاده از روش تابع پاسخ فرکانسی که در این پژوهش بررسی شد و روش داده‌های شکل مود که در پژوهش قبلی نویسنده اعمال گردید، محدود شود.

برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود، روش حاضر بر روی یک سازه دریایی و یا بندری که با خرپا و یا قاب مدلسازی می شوند اعمال گردد. جرثقیل‌های تخلیه و بارگیری، اسکله‌ها، برج‌های مخابراتی، داک‌های شناور و سکوهای نفتی نمونه‌ای از سازه‌های مدنظر هستند.

۵- مراجع

1- HONG-PING, Z., BO, H. and XIAO-QIANG, C.,(2005), *Detection of structural damage through changes in frequency,* Wuhan University Journal of

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]

Natural Sciences **10**(6), p. 1069-1073. DOI: 10.1007/BF02832469

2- DOEBLING, S. W., FARRAR, C. R., PRIME, M. B. and SHEVITZ, D. W.,(1996), *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*. DOI: 10.2172/249299

3- FAN, W. and QIAO, P.,(2011), *Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study,* Structural health monitoring **10**(1), p. 83-111. DOI: 10.1177/1475921710365419

4- ESFANDIARI, A., SANAYEI, M., BAKHTIARI-NEJAD, F. and RAHAI, A.,(2010), *Finite element model updating using frequency response function of incomplete strain data,* AIAA journal **48**(7), p. 1420-1433. DOI: 10.2514/1.J050039

5- IZADI, A. and ESFANDIARI, A.,(2023), *Structural damage identification by a sensitivity-based finite element model updating method using transmissibility function data,* Ships and Offshore Structures **18**(10), p. 1415-1428. DOI: 10.1080/17445302.2022.2120296

6- YAO, R. and PAKZAD, S. N.,(2015), *Multisensor aggregation algorithms for structural damage diagnosis based on a substructure concept,* Journal of Engineering Mechanics **141**(6), p. 04014164. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.000087

7- TOMASZEWSKA, A.,(2010), *Influence of statistical errors on damage detection based on structural flexibility and mode shape curvature,* Computers & structures **88**(3-4), p. 154-164. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.08.017

8- OSTACHOWICZ, W., SOMAN, R. and MALINOWSKI, P.,(2019), *Optimization of sensor placement for structural health monitoring: A review,* Structural health monitoring **18**(3), p. 963-988. DOI: 10.1177/1475921719825601

9- NI, Z., WU, C., WU, S. and ZHANG, Y.,(2021), in *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE, p. 1189-1194. DOI: 10.23919/CCC52363.2021.9550482

10- YANG, C. and XIA, Y.,(2022), *Optimal sensor placement based on dynamic condensation using multi-objective optimization algorithm,* Structural and Multidisciplinary Optimization **65**(7), p. 210. DOI: 10.1007/s00158-022-03307-9

11- HUANG, W., CAO, H., GU, Y., YANG, X. and LIU, W.,(2021), in *2021 China Automation Congress (CAC)*. IEEE, p. 3446-3451. DOI: 10.1109/CAC53003.2021.9727487

12- KAMMER, D. C.,(1991), *Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures,* Journal of Guidance, Control, and Dynamics **14**(2), p. 251-259. DOI: 10.2514/3.20635

13- YAO, L., SETHARES, W. A. and KAMMER, D. C.,(1993), *Sensor placement for on-orbit modal identification via a genetic algorithm,* AIAA journal **31**(10), p. 1922-1928. DOI: 10.2514/3.11868

14- REYNIER, M. and ABOU-KANDIL, H.,(1999), *Sensors location for updating problems,* Mechanical systems and signal processing **13**(2), p. 297-314. DOI: 10.1006/mssp.1998.1213

15- XIA, Y. and HAO, H.,(2000), *Measurement selection for vibration-based structural damage identification,* Journal of Sound and Vibration **236**(1), p. 89-104. DOI: 10.1006/jsvi.2000.2960

16- TRENDAFILOVA, I., HEYLEN, W. and VAN BRUSSEL, H.,(2001), *Measurement point selection in damage detection using the mutual information concept,* Smart materials and structures **10**(3), p. 528. DOI: 10.1088/0964-1726/10/3/315

17- SKELTON, R. E. and LI, F.,(2004), in *Smart Structures and Materials 2004: Modeling, Signal Processing, and Control*. SPIE, vol. 5383, p. 194-201. DOI: 10.1117/12.540156

18- KAOUK, M. and ZIMMERMAN, D. C.,(1994), *Structural damage assessment using a generalized minimum rank perturbation theory,* AIAA journal **32**(4), p. 836-842. DOI: 10.2514/3.12061

19- ZIMMERMAN, D. C. and KAOUK, M.,(1994), *Structural damage detection using a minimum rank update theory*. DOI: 10.1115/1.2930416

20- GHARECHAHI, A. and KETABDARI, M. J.,(2017), *A novel method for selecting measurement points in structural model updating and damage detection,* Journal of Civil Structural Health Monitoring **7**, p. 471-482. DOI: 10.1007/s13349-017-0237-4

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-26]

[DOI: 10.61186/marineeng.20.42.13]