

## استفاده از روش SPH برای مدل‌سازی Sloshing در یک مخزن نیمه پر

سید مجید حسینی امین<sup>۱</sup>، مهرداد تقی زاده منظری<sup>۲</sup>

۱- کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

### چکیده

نیروهای ناشی از Sloshing به دلیل توانایی تخریب سازه‌های مخازن نگهدارنده خود، از اهمیت بسیار زیادی به ویژه در نزد طراحان کشتی برخوردار می‌باشند. این موضوع در طراحی مخازن حمل مایعات مانند تانکهای LNG، LPG و نفت خام از حساسیت ویژه‌ای برخوردار است. در اینجا از یک روش لاگرانژی بدون شبکه به نام Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) برای مدل‌سازی Sloshing استفاده شده است. روش ارائه شده از معادله بقای جرم و نویر-استوکس به عنوان معادلات پایه‌ای استفاده می‌کند. SPH برای حل معادلات بر روی ذرات از دو مرحله پیش‌بینی اولیه و اصلاح ثانویه استفاده می‌کند. در مرحله پیش‌بینی اولیه سرعت موقتی ذرات براساس مجموعه نیروهای وارده و بدون در نظر گرفتن شرط تراکم ناپذیری بدست آمده و ذرات براساس این سرعت موقتی به حرکت واداشته می‌شوند. معمولاً در طی مرحله اول چگالی ذرات ثابت نمی‌ماند، در نتیجه به مرحله ثانویه‌ای نیاز است که چگالی ذرات را به مقدار ثابت اولیه بازگرداند. در مرحله دوم معادله بقای جرم به گونه‌ای تعریف می‌شود که بتوان به کمک آن مقدار انحراف از چگالی ثابت اولیه را محاسبه نمود. سپس به کمک معادله پواسون فشار، تغییر چگالی ذرات با یک میدان فشاری به گونه‌ای مرتبط می‌شود که در صورت افزایش چگالی، فشار مثبت ایجاد شده ذرات را از یکدیگر دور نماید، و در صورت کاهش چگالی موضعی ذرات، با ایجاد یک نیروی فشاری منفی ذرات بطرف یکدیگر حرکت کنند. در مقاله حاضر از روش SPH برای شبیه‌سازی Sloshing در یک مخزن نیمه پر مایع با شکل اولیه سینوسی و دامنه کوچک استفاده شده است.

کلمات کلیدی: روش SPH، Sloshing، جریان تراکم ناپذیر

## SIMULATION OF SLOSHING IN A SEMI - FILLED CONTAINER USING SPH METHOD

### Abstract

The motion of fluids within partially filled containers has been the subject of much study by scientists and engineers due, in large part, to its importance in many practical applications. For example, civil engineers and seismologists have actively studied the effects of earthquake-induced fluid motions on oil tanks and water towers. In recent years, aerospace engineers have been concerned with the effect of fluid sloshing within propellant tanks on the stability of aircraft, rockets, and satellites. All of these applications seek container designs which minimize the amplitude of fluid forces over a gain range of operating conditions. In this paper, an incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is developed to numerically simulate viscous free surface flows in partially filled containers. The mass conservation and Navier-Stokes equations are solved as basic equations. The method uses a prediction-correction fractional step technique. In the prediction step, the temporal velocity field is integrated in time without enforcing incompressibility and in the correction step the resulting deviation of particle density is implicitly projected onto a divergence-free space to satisfy incompressibility through a pressure Poisson equation derived from an approximate pressure projection. The proposed SPH method is used to simulate the sloshing of a omliquid wave with low amplitude under the influence of gravity. Initial shape of free surface is defined by one half of a cosine wave with low amplitude. The results of simulation are in good agreement with experimental and other modeling data.

**Keywords:** Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method, sloshing, free surface, incompressible flow

## مقدمه

حرکات نوسانی سیال در یک تانک نیمه پر Sloshing نامیده می شود. نیروهای ناشی از Sloshing در برخی موارد توانایی تخریب سازه های تانک را دارا می باشند، به همین دلیل در سالهای اخیر این موضوع شدیداً مورد توجه طراحان کشتی قرار گرفته است. در طراحی مخازن حمل مایعات مانند تانکهای LNG، LPG و نفت خام بدلیل حساسیت بالا، توانایی تخریبی ذکر شده می بایست کاملاً مورد توجه قرار گیرد. بررسی حرکت سیال در یک مخزن نیمه پر از دیر باز مورد توجه دانشمندان و مهندسان بوده است چراکه شبیه سازی این پدیده در عمل کاربرد بسیار زیادی دارد [۱]. به عنوان مثال مدلسازی حرکت سیال ناشی از زلزله در مخازن نگهداری سوخت های مایع و برجهای آب از اهمیت بسیار زیادی در نزد مهندسان عمران برخوردار می باشد. در سالهای اخیر توجه مهندسان هوافضا شدیداً به مسئله Sloshing در تانکهای حاوی سوخت مایع و تاثیرات آن بر پایداری موشکها، سفینه ها و ... جلب شده است. علیرغم توانایی و ظرفیت بالای کامپیوترهای موجود، حل عددی جریان سیال در تانک های نیمه پر هنوز مسئله ای بحث برانگیز می باشد. عامل سه بعدی و ناپایدار (گذرا) بودن میدان جریان سیال در مسئله ذکر شده را شاید بتوان یکی از دلایل اصلی این امر دانست، چرا که حل عددی چنین جریاناتی مستلزم حل مسئله در گام های زمانی بسیار زیاد و به تبع آن زمان محاسباتی بسیار طولانی، ظرفیت حافظه بالا و حجم بالای ذخیره سازی اطلاعات دارد. مشکل بعدی در مدلسازی سطح آزاد سیال، تئوری های موجود برای مدلسازی خود سطح آزاد می باشد. در گذشته مسائل پیچیده درگیر با Sloshing غالباً به کمک روشهای آزمایشگاهی مورد بررسی قرار می گرفت، اما در سالهای اخیر، روشهای عددی متعددی برای شبیه سازی این پدیده به کار گرفته شده است. روشهای [۲] MAC و [۳] VOF متداولترین روشهایی می باشند که امروزه برای شبیه سازی چنین جریانهایی استفاده می شوند. روش MAC از ذرات نشان دار (marker particles) برای تعریف سطح آزاد

استفاده می کند، این درحالیست که در روش VOF از حل معادله انتقال برای بدست آوردن جزء حجمی سیال استفاده می شود. این روشها بطور موفقیت آمیزی برای طیف وسیعی از مسائل کاربردی مرتبط با سطح آزاد استفاده شده اند. در هر دو روش ذکر شده معادلات نویر-استوکس بر روی شبکه های ثابت اوپلری حل می شوند. مشکل پخش عددی (numerical diffusion) به علت ترم های جابجائی در معادله نویر-استوکس ایجاد می شوند، این مسئله بخصوص در مواردیکه تغییر شکل سطح آزاد زیاد باشد شدیداً مشکل ساز خواهد شد [۴].

روش SPH یک روش لاگرانژی برای مدلسازی جریان سیال و انتقال حرارت می باشد. در این بجای استفاده از شبکه های ثابت اوپلری، محیط سیال با ذراتی (particles) تقریب زده می شوند که براحتی قادر به حرکت می باشند. در واقع ذرات گفته شده، صرفاً نقاط میان یابی متحرکی می باشند که خواص فیزیکی سیال نظیر دما، انتالپی، چگالی و ... را با خود حمل می کنند، این خواص حتی می توانند تنش، کرنش و خواص رئولوژیکی ذرات باشند. روش SPH در طول دو دهه گذشته، پس از تدوین اصول اولیه، بطور گسترده برای شبیه سازی مسائل مربوط به فیزیک اخترشناسی و مدلسازی حرکت اجرام آسمانی نسبت به یکدیگر استفاده شده است. پس از انجام اصلاحات لازم، از این روش برای مدلسازی جریان های تراکم ناپذیر در محفظه های بسته نیز استفاده شد. مزایای عمده روش SPH برای مدلسازی انتقال حرارت و جرم در کاربردهای صنعتی عبارتند از [۵]:

- سطح آزاد با اشکال بسیار پیچیده و رفتار سطح مشترک مواد، بطور طبیعی و براحتی مدلسازی می شوند.
- استفاده از چارچوب لاگرانژی به معنی حذف ترم های غیر خطی در معادله مومنتوم است، بنابراین می توان پیش بینی کرد که پدیده های که در طبقه بندی مسائل مومنتوم غالب (momentum dominated) قرار

است. روش استفاده شده دو مرحله ای بوده که شامل مرحله پیش بینی اولیه و تصحیح ثانویه می باشد. در مرحله پیش بینی اولیه هر ذره در اثر مجموعه نیروهای وارده، بدون توجه به تغییرات چگالی حرکت می کند و در مرحله تصحیح ثانویه شروط لازم برای بازگرداندن چگالی به مقدار اولیه اعمال می شود، تا در نهایت سیال به صورت تراکم ناپذیر مدل گردد. نتایج حل مسئله در مود اول آن به کمک روش VOF و SPH با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج حاصله حاکی از سازگاری بسیار خوب اشکال بدست آمده در زمانهای یکسان با نتایج مشابه VOF می باشد

### مدل ریاضی

بعلت پیچیدگی ذاتی مسائل درگیر با سطح آزاد سیال، برخی از فرضیات ساده سازی بکار گرفته شدند که عبارتند از: چگالی و ویسکوزیته ثابت، تراکم ناپذیری و همدمای بودن میدان سیال، صرفنظر از کشش سطحی و انتقال جرم سطحی.

معادلات حاکم برای شبیه سازی جریان سطح آزاد سیال در دو بعد، معادلات بقای جرم و مومنتوم می باشند، که با در نظر گرفتن ذرات سیال، این معادلات به فرم لاگرانژی نوشته شده اند [۴].

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

تراکم ناپذیر پس از حل این معادله می بایست مقدار انحراف چگالی نسبت به چگالی اولیه سنجیده شود تا در مرحله اصلاحی هر گام زمانی، چگالی به مقدار اولیه تصحیح گردد. در واقع برای مدل‌سازی جریان‌های تراکم

می گیرند براحتی با این روش قابل حل باشند.

- فیزیک های پیچیده نظیر مسائل چند فازی، معادله حالت واقعی، تراکم پذیری، انجماد، جریان در محیط متخلخل، میدان های الکترومغناطیسی وابسته به خواص مواد براحتی مدل‌سازی می گردد.

همانطور که گفته شد این روش در سالهای اخیر برای مدل‌سازی جریان‌های تراکم ناپذیر شدیداً مورد توجه قرار گرفته است و به همین دلیل هنوز در بسیاری از زمینه ها به عنوان یک ابزار محاسباتی استفاده نشده است تا نحوه عملکرد و دقت نتایج آن به درستی ثبت گردد. از جمله این زمینه ها می توان به مدل‌سازی کاویتاسیون و مدل‌سازی واکنش های شیمیایی اشاره کرد که تاکنون مقاله ای در مورد مدل‌سازی این پدیده ها با روش SPH منتشر نشده است.

در این مقاله از فرمولاسیون تراکم ناپذیر SPH برای شبیه سازی پدیده ضربه زنی آب (Sloshing) در یک مخزن نیمه پر مایع استفاده شده است. سطح آزاد مایع در ظرف دارای شکل اولیه سینوسی با دامنه کوچک می باشد. بدیهی است که در این روش، معادلات حاکم بر مسئله از قبیل معادله بقای جرم و بقای مومنتوم به صورت تعبیری خاص از معادلات لاگرانژی استفاده شده اند که به تفصیل آورده شده

در روابط بالا  $\rho$  چگالی ذرات سیال ،  $t$  زمان،  $\mathbf{u}$  سرعت ذرات،  $P$  فشار،  $\mathbf{g}$  شتاب جاذبه و  $\boldsymbol{\tau}$  تنسور تنش برشی می باشد. معادله (۱) به فرم سیال تراکم پذیر نوشته شده است. اما برای مدل‌سازی جریان‌های

استوکس در نظر گرفته می شوند و در نتیجه سرعت و موقعیت موقتی برای هر ذره محاسبه می گردد. فرمولهای بکار رفته در این مرحله عبارتند از [۴]:

$$\Delta u_*^p = \left( g + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \right) \Delta t \quad (3)$$

$$u_*^p = u_t^p + \Delta u_*^p \quad (4)$$

$$P_*^p = P_t^p + u_*^p \Delta t \quad (5)$$

ثابت اولیه  $\rho_0$  سنجیده می گردد.  $\rho_*$  براساس موقعیت موقتی ذره  $P_*^p$  محاسبه می گردد. بنابراین مرحله اصلاحی دوم می بایست اجراء شود تا با اصلاح موقعیت ذرات نسبت به یکدیگر چگالی ثابت اولیه آنها حفظ شود. در مرحله اصلاحی جمله فشاری برای تصحیح مقدار سرعت موقتی ذرات که در مرحله اولیه بدست آمده بود، بکار می رود. روند اصلاحی ذکر شده به کمک روابط زیر پیاده سازی می شود [۴]:

$$\Delta u_{**}^p = -\frac{1}{\rho} \nabla P_{t+\Delta t} \Delta t \quad (6)$$

$$u_{t+\Delta t}^p = u_*^p + \Delta u_{**}^p \quad (7)$$

در زمان  $t + \Delta t$  فشار و سرعت ذره  $P_{t+\Delta t}$  و  $u_{t+\Delta t}^p$  می باشد. سرانجام موقعیت نهایی ذرات عبارتست از [۴]:

$$P_{t+1}^p = P_t^p + \frac{(u_t^p + u_{t+1}^p)}{2} \Delta t \quad (8)$$

ناپذیر پروسه حل از دو مرحله پیش بینی اولیه و مرحله اصلاحی ثانویه تشکیل شده است. در مرحله پیش بینی اولیه هر ذره در اثر مجموعه نیروهای وارده و با توجه به بازه زمانی استفاده شده به حرکت واداشته می شود اما شرط تراکم ناپذیری سیال لحاظ نمی شود بلکه فقط تنسور تنش و ترم های گرانشی در معادله نویر-

در این معادلات  $u_t$  و  $P_t^p$  سرعت و موقعیت ذره در لحظه  $t$ ،  $u_*$  و  $P_*^p$  سرعت و موقعیت موقتی ذره می باشند.  $\Delta u_*^p$  تغییر سرعت هر ذره در طول پروسه پیش بینی اولیه و  $\Delta t$  طول بازه هر گام زمانی می باشد. در طول مرحله اول پیش بینی، معمولا شرط تراکم ناپذیری ارضاء نمی شود. این شرط بوسیله اندازه گیری میزان انحراف چگالی موقتی هر ذره  $\rho_*$  از چگالی

در روابط بالا  $\Delta u_{**}^p$  تغییر سرعت ذرات در طی مرحله اصلاحی دوم و  $\rho_*$  چگالی موقتی ذرات است که در پایان مرحله پیش بینی اولیه محاسبه شده بود.

در رابطه فوق  $P_t$  و  $P_{t+\Delta t}$  موقعیت های نهایی ذره در لحظات  $t$  و  $t + \Delta t$  می باشد. معادله بکار رفته برای بدست آوردن فشار لازم جهت ارضاء شرط تراکم

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 - \rho_*}{\Delta t} + \nabla \cdot (\Delta \mathbf{u}_{**}) = 0 \quad (9)$$

در معادله فوق  $\rho_*$  چگالی موقتی سیال در پایان مرحله پیش بینی اولیه و  $\rho_0$  چگالی ثابت سیال است. در پایان هر گام زمانی می بایست چگالی هر ذره

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P_{t+\Delta t} \right) = \frac{\rho_0 - \rho_*}{\rho_0 \Delta t^2} \quad (10)$$

### اصول روش SPH

در ذات روش SPH یک روش میان یابی قرار دارد که به هر تابعی اجازه می دهد براساس مقادیر خود در یک مجموعه نامنظم از نقاط تعریف گردد، که این نقاط در روش SPH ذرات (particles) نامیده می شود.

$$\mathbf{A}_h(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}') w(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (11)$$

که  $w$  تابع کرنل میان یاب است که دو خاصیت اساسی زیر را دارا می باشد [5]:

$$\int_V w(\mathbf{u}, h) d\mathbf{u} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} w(\mathbf{u}, h) = \delta(\mathbf{u}) \quad (12)$$

در روشهای عددی میان یاب انتگرالی معمولاً با یک مجموع میان یاب تقریب زده می شود [۵]:

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{\mathbf{A}_j}{\rho_j} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (13)$$

در این رابطه  $W(\mathbf{r}, h)$  تابعی با خصوصیات یک  $C^2$ - spline می باشد که دارای شعاع هموارسازی کرنل  $2h$  می باشد. گرادینان تابع  $A$  با مشتق گیری از تابع میان یاب (۱۳) بصورت زیر بدست می آید:

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{\mathbf{A}_j}{\rho_j} \nabla w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (14)$$

### تابع کرنل

کرنلهایی که در روش SPH استفاده می شود براساس تابع اسپلاین تعریف شده است [۵]:

استفاده از کرنل های متفاوت در روش SPH همانند بکارگیری روشهای متفاوت گسسته سازی در روش تفاضل محدود می باشد. یکی از متداولترین

$$w(r, h) = \frac{\sigma}{h^v} \times \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 & 0 \leq s < 1 \\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & 1 \leq s < 2 \\ 0 & 2 \leq s \end{cases} \quad s = \frac{|\mathbf{r}|}{h} \quad (15)$$

کرنل پیوسته است و ترم خطای حاکم در میان یاب انتگرال  $O(h^2)$  می باشد. شعاع هموارسازی این کرنل  $2h$  می باشد به این معنی که ذرات در فاصله دورتر از  $2h$  هیچ برهم کنشی با یکدیگر ندارند.

در معادله فوق  $v$  تعداد ابعاد مسئله و  $\sigma$  یک ثابت نرمال شده با مقادیر  $2/3$  و  $10/7\pi$  و  $1/\pi$  به ترتیب برای یک، دو و سه بعد می باشد. مشتق دوم این

### معادله پیوستگی

معادله پیوستگی به شکل زیر نوشته می شود [۵]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla w_{ij} \quad (16)$$

یکدیگر دور خواهد کرد. به طریق مشابه اگر دو ذره از یکدیگر فاصله بگیرند، چگالی آنها کاهش خواهد یافت و فشار منفی ایجاد شده دو ذره را به سمت یکدیگر می‌کشاند. این رفتار متقابل چگالی و فشار برحسب سرعت نسبی ذرات سبب می‌شود که بتوان رفتار سیال را تراکم ناپذیر فرض کرد چرا که با انجام دو مرحله پیشگویی اولیه و تصحیح ثانویه در هرگام زمانی، فاصله ذرات نسبت به یکدیگر تقریباً در کل پروسه حل ثابت می‌ماند.

در معادله فوق  $\rho_i$  چگالی ذره  $i$  با سرعت  $v_i$  بوده و  $m_j$  جرم ذره  $j$  می‌باشد. بردار موقعیت از ذره  $j$  تا ذره  $i$  بصورت  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  نشان داده می‌شود و  $w_{ij} = w(\mathbf{r}_{ij}, h)$  می‌باشد. وقتی که دو ذره به یکدیگر نزدیک می‌شوند سرعت نسبی آنها منفی بوده و بعلافت منفی بودن گرادیان تابع کرنل،  $d\rho_i/dt$  که حاصلضرب این دو مقدار است مثبت خواهد شد. عبارت دیگر  $\rho_i$  افزایش خواهد یافت. این عامل باعث ایجاد یک فشار مثبت شده که در نهایت ذرات را از

### فرمولاسیون گرادیان و دیورژانس

شکل متقارن زیر یکی از متداولترین فرم‌های بکار رفته برای فرمولاسیون گرادیان می‌باشد. علت این امر را می‌توان در پایستگی دقیق ممنتوم خطی و زاویه ای

جستجو کرد، بطور مثال گرادیان فشار بصورت زیر نمایش داده می‌شود [۴]:

$$\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right)_a = \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2}\right) \nabla_a W \quad (17)$$

به طریق مشابه دیورژانس بردار  $\mathbf{u}$  متعلق به ذره  $a$ ، می‌تواند بصورت متقارن به شکل زیر فرموله گردد [۴]:

در رابطه فوق  $\nabla_a W_{ab}$  گرادیان تابع کرنل با در نظر گرفتن موقعیت ذره  $a$  می‌باشد. در عمل فقط ذراتی که در فاصله کمتر از  $2h$  قرار دارند تاثیرگذار خواهند بود.

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_a = \rho_a \sum_b m_b \left(\frac{\mathbf{u}_a}{\rho_a^2} + \frac{\mathbf{u}_b}{\rho_b^2}\right) \cdot \nabla_a W_{ab} \quad (18)$$

تفاضل محدود مشتق مرتبه اول، باعث فرمولاسیون بهتری به لحاظ پایداری بیشتر در مقابل نامنظم بودن نقاط می‌شود. در نهایت رابطه زیر بعنوان عملگر لاپلاسین پیشنهاد شده است [۴]:

### فرمولاسیون لاپلاسین

لاپلاسین در معادله پوآسون فشار، معادله (۱۰)، را می‌توان بوسیله ترکیب عملگرهای دیورژانس و گرادیان بدست آورد. اما تعریف عملگر لاپلاسین براساس ترکیبی از تعاریف پایه ای SPH و استفاده از تقریب

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right)_a = \sum_b m_b \frac{8}{(\rho_a + \rho_b)^2} \frac{P_{ab} \mathbf{P}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{|\mathbf{P}_{ab}^{\mathbf{P}}|^2 + \eta^2} \quad (19)$$

شدن مخرج عبارت در حین پروسه حل ارائه شده است و معمولا برابر  $0.1h$  در نظر گرفته می شود.

در رابطه فوق  $P_{ab} = P_a - P_b$  و  $r_{ab} = r_a - r_b$  و عددی کوچک است که برای جلوگیری از صفر

### ویسکوزیته

در معادله (۱۸) ترم شامل ویسکوزیته به شکل زیر بدست می آید [۴]:

جمله ویسکوزیته در معادله (۲) بصورت ترکیبی از SPH استاندارد و تقریب تفاضل محدود برای مشتق مرتبه اول تعریف می شود. با اعمال تعریف دیورژانس

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau\right)_a = \sum_b m_b \left( \frac{\tau_a}{\rho_a^2} + \frac{\tau_b}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} \quad (20)$$

در معادله فوق تنش  $\tau$  و تنسور کرنش  $\Delta$  به شکل مجموع با یکدیگر ارتباط پیدا می کنند [۴]:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu_{eff} \Delta_{ij} \quad (21)$$

در رابطه فوق  $\mu_{eff}$  ویسکوزیته متغیری است که درسیالات غیر نیوتنی مقداری غیر ثابت دارد.  $\Delta_{ij}$  به صورت زیر تعریف می شود [۴]:

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (22)$$

مشتق کامل بین دو ذره با استفاده از تعریف تفاضل محدود بدست آمده باشد. بنابراین خواهیم داشت [۴]:

در اینجا ذکر این نکته ضروری به نظر می رسد که برای اعمال روابط فوق به ذرات SPH، قبلا می بایست

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_a = \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_{ab}}\right) \left(\frac{\partial r_{ab}}{\partial x_j}\right)^{-1} = \frac{(u_i)_a - (u_i)_b}{r_{ab}} \frac{(x_j)_a - (x_j)_b}{r_{ab}} \quad (23)$$

تراکم ناپذیری، رابطه مربوط به ترم ویسکوزیته در فرمولاسیون SPH بصورت زیر خواهد شد [۴]:

با در نظر گرفتن سیالات نیوتنی نظیر آب ظریف ویسکوزیته موثر برابر مقدار ثابت  $\mu$  خواهد بود. بنابراین با ترکیب معادلات (۲۰) و (۲۳) و اعمال شرط

$$\left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u\right)_a = \sum_b \frac{4m_b (\mu_a + \mu_b) P_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)^2 (|P_{ab}|^2 + \eta^2)} (u_a^p - u_b^p) \quad (24)$$

## مدلسازی مرزهای جامد

بطور کلی دیواره های جامد بوسیله ذرات مرزی شبیه سازی می شوند که با تنظیم فشار ذرات داخلی مانع از نفوذ آنها به داخل دیواره های جامد می شود. روش دیگر برای مدل‌سازی دیواره جامد بوسیله ذرات مرزی اعمال یک میدان نیروی دافعه بر روی ذرات مرزی می باشد که مانع نفوذ ذرات داخلی گردد [۶]. راه دیگر مدل‌سازی مرزهای جامد استفاده از تصویر مجازی ذرات داخلی سیال، با فرض عملکرد آینه ای مرزهای جامد می باشد. در اینصورت با نزدیک شدن ذرات داخلی به دیواره تصویر این ذرات نیز به دیواره نزدیک می شود که در نتیجه مانع از نفوذ ذرات به مرزهای جامد می گردد [۷].

در این مقاله دیواره های جامد بوسیله ذرات مرزی مدل‌سازی شده اند ذراتی که از هر نظر خواصی مشابه ذرات داخلی سیال دارند با این تفاوت که پس از محاسبه سرعت در هر گام زمانی این مقدار برای ذرات مرزی مساوی صفر قرار داده می شود. بنابراین موقعیت این ذرات در حین پروسه حل ثابت می ماند. از طرفی خواص ذرات مرزی وابسته به جریان موجود در داخل

میدان محاسباتی می باشد. به عنوان مثال حرکت ذرات مرزی به طرف دیواره باعث افزایش چگالی آنها و در نتیجه تولید فشار مثبت در ذرات مرزی می گردد که مانع نفوذ ذرات داخلی به داخل میدان محاسباتی می گردد.

## تحلیل همگرایی

بدلیل اینکه ذرات داخلی سیال ذاتاً ذراتی گسسته می باشند نمی توانند مانند سیالات واقعی تغییر شکل پیدا کنند. بنابر این تعداد این ذرات می بایست به اندازه کافی انتخاب شود تا جریان واقعی سیال شبیه سازی شود و از طرفی همگرایی عددی لازم نیز بدست آید. همگرایی هنگامی حاصل می شود که با دو برابر کردن تعداد ذرات داخلی سیال نتایج بدست آمده تغییری نکند. این در حالیست که بازه زمانی  $\Delta t$  نیز می بایست با دو برابر شدن تعداد ذرات، نصف شود تا سازگاری (consistency) پروسه حل ارضاء گردد. طول بازه هر گام زمانی در محاسبات می بایست شرط کورانت (Courant condition) زیر را نیز ارضاء نماید [۴]:

$$\Delta t \leq 0.1 \frac{l_0}{V_{\max}} \quad (25)$$

0.1 حرکت می کنند. بعلاوه طول هر بازه زمانی می بایست به گونه ای انتخاب گردد که ترمهای پخش لزجتی را کنترل کند، بعبارت دیگر در هر گام زمانی شرط زیر باید ارضاء گردد [۴]:

$$\Delta t \leq \alpha \frac{l_0^2}{\mu_{\text{eff}} / \rho} \quad (26)$$

## لیست ذرات مرتبط با یکدیگر

در روش SPH تراکم ناپذیر هر ذره نیاز به لیستی از ذرات مجاور دارد که در شعاع همسایگی کوچکتر یا مساوی محدوده اثرپذیری کرنل قرار داشته باشند. لیست کامل این ذرات، که در هر گام زمانی می بایست مجدداً تولید شود، نیاز به  $N^2$  عملیات محاسباتی دارد تا

در رابطه فوق  $V_{\max}$  بیشینه سرعت پیش بینی شده در هر گام زمانی از محاسبات می باشد. ضریب 0.1 تضمین می کند که ذرات در هر گام زمانی تنها به اندازه جزئی از فاصله اولیه ذرات (در اینجا)

در رابطه فوق  $\alpha$  ضریبی است که به انتخاب نوع کرنل و آرایش اولیه ذرات بستگی دارد که معمولاً از مرتبه 0.1 است. در روشهای تفاضل محدود صریح نیز معمولاً شروطی نظیر معادله (۲۶) به عنوان شرط پایداری وجود دارد.

ساختند و پدیده های مختلف جریان را مورد مطالعه قرار دادند [۸]. در سالهای اخیر نیز روشهای CFD برای شبیه سازی چنین جریانهایی مورد توجه قرار گرفته است. لازم به ذکر است که روشهای مورد استفاده می بایست قابلیت مدلسازی دقیق جریانات سطحی و همچنین حفظ پایداری انتقال انرژی از فرم پتانسیل به جنبشی و برعکس را دارا باشند و بعلاوه پخش عددی ناشی از گسسته سازی آنها ناچیز باشد. ابعاد مسئله مورد مطالعه، در شکل ۱ نشان داده شده است. این ابعاد دقیقاً با مدل آزمایشگاهی بکار رفته توسط راد و همکارانش مطابقت دارد. عمق متوسط اولیه سیال 0.05 متر بوده و سطح اولیه آن بوسیله یک نیم موج کسینوسی با دامنه 0.005 تعریف شده است. ظرف دارای ابعاد  $0.1 \times 0.065$  متر می باشد. جریان سیال غیرلزج فرض شده است و کل سیال تحت اثر یک میدان گرانشی با شتاب ثابت  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  قرار دارد. پیرو تئوری Sloshing در مود اول آن از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\tau = 2\pi\sqrt{gk \tanh(kh)} = 0.3739s \quad (27)$$

VOF SPH مطابقت خوبی با نتایج حاصل از روش نشان می دهند.

فاصله بین تمامی ذرات، محاسبه گردد  $N$  (تعداد کل ذرات است). روشهای بهینه سازی متفاوتی برای محاسبه این لیست ذرات ارائه شده است.

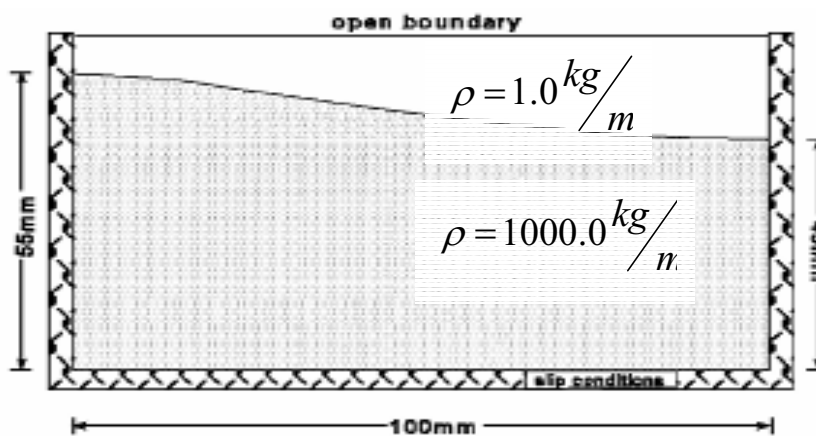
در این مقاله از تقسیم دامنه محاسباتی به سلولهایی به شعاع  $2h$  و تولید لیستی از ذرات متعلق به هر سلول در هر گام زمانی از پروسه حل استفاده شده است. فرض به کار رفته در مورد هر ذره این است که فقط با ذرات واقع در سلولهای مجاور اندرکنش دارد. با بکارگیری این روش بازده محاسباتی تا حد قابل ملاحظه ای افزایش خواهد یافت [۴].

### شبیه سازی Sloshing با دامنه کوچک

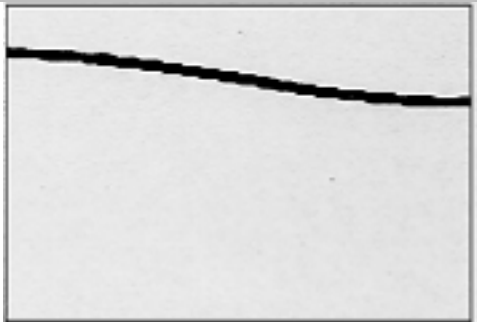
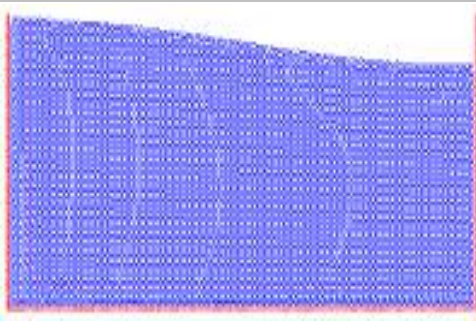
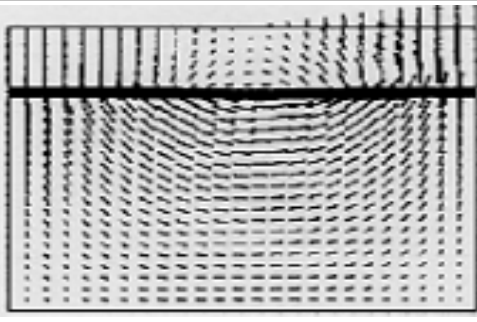
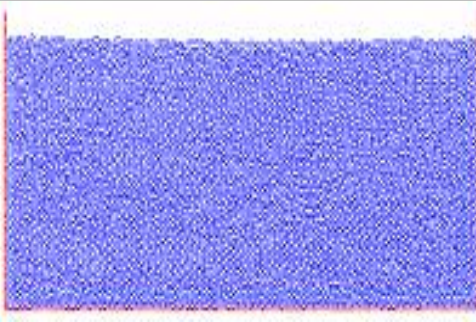
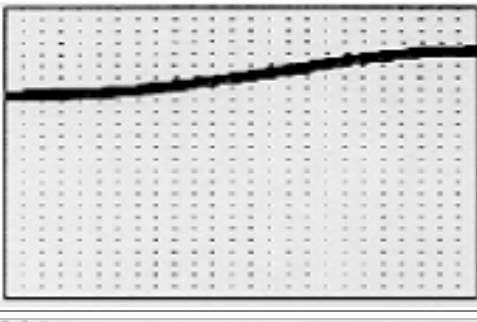
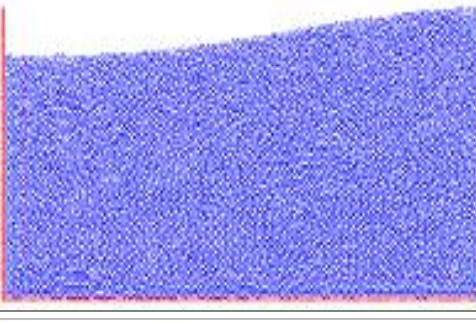
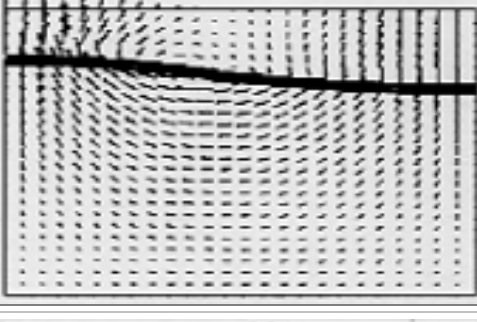
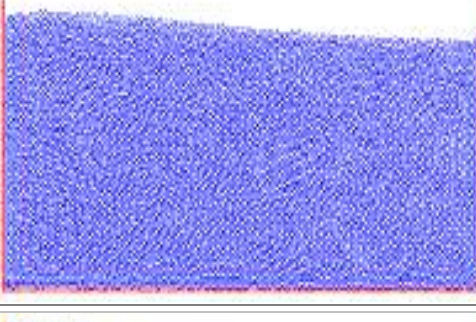
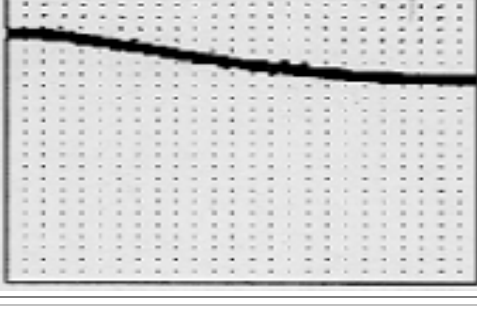
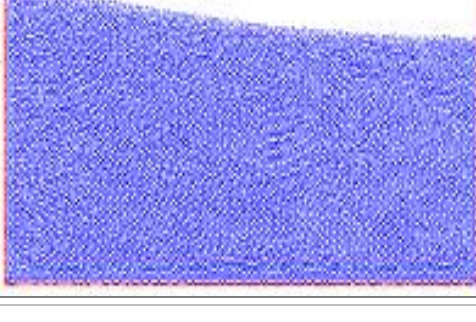
#### تحت نیروی گرانشی

در اینجا بعنوان یک مسئله نمونه از جریان با سطح آزاد پیچیده، مسئله ضربه زنی آب (Water sloshing) مورد مطالعه قرار میگیرد. ضربه زنی ایجاد شده در یک ظرف مایع با دامنه موج کوچک و تحت اثر نیروی گرانشی با بکارگیری ابزارهای ریاضی بطور مفصل مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۵ راد و همکارانش مدل آزمایشگاهی مناسبی برای مسئله

در رابطه بالا  $k$  عدد موج و  $h$  عمق متوسط سیال می باشد. نتایج حل مسئله در پیرو اول در شکل ۲ نشان داده شده است. شکل نتایج حل به کمک روش



شکل ۱ - شماتیک شرایط اولیه مسئله و ابعاد بکار رفته در مدلسازی عددی [۸]

زمان	نتایج VOF [۸]	نتایج SPH
<i>Initial condition</i>		
<i>1/4 Period</i>		
<i>1/2 Period</i>		
<i>7/8 Period</i>		
<i>1 Period</i>		

شکل ۲- نتایج حاصل از مدل‌سازی به روش SPH برای وضعیتهای متفاوت سیال غیر لزج با شکل اولیه سینوسی و تحت اثر گرانش

## نتیجه گیری

میدان گرانشی با شتاب ثابت  $g = 9.81 m/s^2$  قرار دارد. نتایج حل مسئله در مود اول آن به کمک روش VOF و SPH با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج SPH حاکی از سازگاری بسیار خوب اشکال بدست آمده در زمانهای یکسان با نتایج مشابه VOF می باشد.

در اینجا نشان داده شد که روش SPH روشی بسیار موثر و دقیق برای شبیه سازی جریانهای با سطوح آزاد می باشد. مقاله پس از ارائه مبانی روش مذکور، بمنظور مدلسازی پدیده ضربه زنی آب ( Sloshing ) در یک مخزن نیمه پر مایع با شکل سطح آزاد اولیه سینوسی و دامنه موج کوچک استفاده شده است. کل حرکت تناوبی سیال، تحت تاثیر یک

## مراجع

- 1) She k., Greated C. A. and Easson W. J., DEVELOPMENT OF A TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL WAVE TANK, Proceeding of the Second (1992) International Offshore and Polar Engineering Conference San Francisco, USA, 14-19 June 1992
- 2) Harlow FH, Welch JE. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Phys Fluids 1965;8(12):322-9.
- 3) Hirt CW, Nichols BD. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. J Comput Phys 1981; 39:201-25.
- 4) Songdong Shao , Edmond Y.M. Lo , Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. Advances in Water Resources 26 (2003) 787-800
- 5) Monaghan J.J., "Smoothed Particle Hydrodynamics", Annual Reviews Astron. Astrophys.,30(1992)543.
- 6) Monaghan JJ, Kos A. Solitary waves on a Cretan beach. J Wtrwy,Port, Coastal and Ocean Eng 1999;125(3):145-54.
- 7) Monaghan J.J., "Improved modelling of boundaries", SPH Technical Note#1, Monash Univ., Applied mathematics reports & preprints,95/30.
- 8) Ubbink Onno, Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces Thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College, Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology & Medicine January 1997.