استفاده از روش SPH برای مدلسازی Sloshing در یک مخزن نیمه پر

سید مجید حسینی امین[۱] ، مهرداد تقی زاده منظری[۲]

۱- کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف
۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

نیروهای ناشی از Sloshing به دلیل توانایی تخریب سازه های مخازن نگهدارنده خود، از اهمیت بسیار زیادی به ویژه در نزد طراحان کشتی برخوردار می باشند. این موضوع در طراحی مخازن حمل مایعات مانند تانکهای LNG ، LPG و نفت خام از حساسیت ویژه ای برخوردار است. در اینجا از یک روش لاگرانژی بدون شبکه به نام Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) برای مدلسازی Sloshing استفاده شده است. روش ارائه شده از معادله بقاء جرم و نویر-استوکس به عنوان معادلات پایه ای استفاده می کند. SPH برای حل معادلات برروی ذرات از دو مرحله پیش بینی اولیه و اصلاح ثانویه استفاده می کند. در مرحله پیش بینی اولیه سرعت موقتی ذرات براساس مجموعه نیروهای وارده و بدون در نظر گرفتن شرط تراکم ناپذیری بدست آمده و ذرات براساس این سرعت موقتی به حرکت واداشته می شوند. معمولا در طی مرحله اول چگالی ذرات ثابت نمی ماند، درنتیجه به مرحله ثانویه ای نیاز است که چگالی ذرات را به مقدار ثابت اولیه بازگرداند. در مرحله دوم معادله بقای جرم به گونه ای تعریف می شود که بتوان به کمک آن مقدار انحراف از چگالی ثابت اولیه را محاسبه نمود. سپس به کمک معادله پوآسون فشار، تغییر چگالی ذرات با یک میدان فشاری به گونه ای مرتبط می شود که در صورت افزایش چگالی، فشار مثبت ایجاد شده ذرات را از یکدیگر دور نماید، و در صورت کاهش چگالی موضعی ذرات، با ایجاد یک نیروی فشاری منفی ذرات بطرف یکدیگر حرکت کنند. در مقاله حاضر از روش SPH برای شبیه سازی Sloshing در یک مخزن نیمه پر مایع با شکل اولیه سینوسی و دامنه کوچک استفاده شده است.

کلمات کلیدی: روش SPH ، Sloshing ، جریان تراکم ناپذیر

SIMULATION OF SLOSHING IN A SEMI - FILLED CONTAINER USING SPH METHOD

Abstract

The motion of fluids within partially filled containers has been the subject of much study by scientists and engineers due, in large part, to its importance in many practical applications. For example, civil engineers and seismologists have actively studied the effects of earthquake-induced fluid motions on oil tanks and water towers. In recent years, aerospace engineers have been concerned with the effect of fluid sloshing within propellant tanks on the stability of aircraft, rockets, and satellites. All of these applications seek container designs which minimize the amplitude of fluid forces over a gain range of operating conditions. In this paper, an incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is developed to numerically simulate viscous free surface flows in partially filled containers. The mass conservation and Navier-Stokes equations are solved as basic equations. The method uses a prediction–correction fractional step technique. In the prediction step, the temporal velocity field is integrated in time without enforcing incompressibility and in the correction step the resulting deviation of particle density is implicitly projected onto a divergence-free space to satisfy incompressibility through a pressure Poisson equation derived fr an approximate pressure projection. The proposed SPH method is used to simulate the sloshing of a omliquid wave with low amplitude under the influence of gravity. Initial shape of free surface is defined by one half of a cosine wave with low amplitude. The results of simulation are in good agreement with experimental and other modeling data.

Keywords: Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method, sloshing, free surface, incompressibleflow

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

مقدمه

حرکات نوسانی سیال در یک تانک نیمه پر Sloshing نامیده می شود. نیروهای ناشی از Sloshing در برخی موارد توانایی تخریب سازه های تانک را دارا می باشند، به همین دلیل در سالهای اخیر این موضوع شدیداً مورد توجه طراحان کشتی قرار گرفته است. در طراحی مخازن حمل مایعات مانند تانکهای LNG ، LPG و نفت خام بدلیل حساسیت بالا، توانایی تخریبی ذکر شده می بایست کاملا مورد توجه قرار گیرد. بررسی حرکت سیال در یک مخزن نیمه پر از دیر باز مورد توجه دانشمندان و مهندسان بوده است چراکه شبیه سازی این پدیده در عمل کاربرد بسیار زیادی دارد[۱]. به عنوان مثال مدلسازی حرکت سیال ناشی از زلزله در مخازن نگهداری سوخت های مایع و برجهای آب از اهمیت بسیار زیادی در نزد مهندسان عمران برخوردار می باشد. درسالهای اخیر توجه مهندسان هوافضا شدیدا به مسئله Sloshing در تانکهای حاوی سوخت مایع و تاثیرات آن بر پایداری موشکها، سفینه ها و ... جلب شده است. علیرغم توانایی و ظرفیت بالای کامپیوترهای موجود، حل عددی جریان سیال در تانک های نیمه پر هنوز مسئله ای بحث برانگیز می باشد. عامل سه بعدی و ناپایدار (گذرا) بودن میدان جریان سیال در مسئله ذکر شده را شاید بتوان یکی از دلائل اصلی این امر دانست، چرا که حل عددی چنین جریاناتی مستلزم حل مسئله در گام های زمانی بسیار زیاد و به تبع آن زمان محاسباتی بسیار طولانی، ظرفیت حافظه بالا و حجم بالای ذخیره سازی اطلاعات دارد. مشکل بعدی در مدلسازی سطح آزاد سیال، تئوری های موجود برای مدلسازی خود سطح آزاد می باشد. در گذشته مسائل پیچیده درگیر با Sloshing غالباً به کمک روشهای آزمایشگاهی مورد بررسی قرار می گرفت، اما در سالهای اخیر، روشهای عددی متعددی برای شبیه سازی این پدیده به کار گرفته شده است. روشهای[۲] MAC و [۳] VOF متداولترین روشهایی می باشند که امروزه برای شبیه سازی چنین جریانهایی استفاده می شوند. روش MAC از ذرات نشان دار (marker particles) برای تعریف سطح آزاد استفاده می کند، این درحالیست که در روش VOF از حل معادله انتقال برای بدست آوردن جزء حجمی سیال استفاده می شود. این روشها بطور موفقیت آمیزی برای طیف وسیعی از مسائل کاربردی مرتبط با سطح آزاد استفاده شده اند. در هر دو روش ذکر شده معادلات نویر-استوکس بر روی شبکه های ثابت اویلری حل می شوند. مشکل پخش عددی (numerical diffusion) به علت ترم های جابجائی در معادله نویر-استوکس ایجاد می شوند، این مسئله بخصوص در مواردیکه تغییر شکل سطح آزاد زیاد باشد شدیدا مشکل ساز خواهد شد[۴].

روش SPH یک روش لاگرانژی برای مدلسازی جریان سیال و انتقال حرارت می باشد. در این بجای استفاده از شبکه های ثابت اویلری ، محیط سیال با ذراتی (particles) تقریب زده می شوند که براحتی قادر به حرکت می باشند. در واقع ذرات گفته شده، صرفاً نقاط میان یابی متحرکی می باشند که خواص فیزیکی سیال نظیر دما، انتالپی، چگالی و ... را با خود حمل می کنند، این خواص حتی می توانند تنش، کرنش و خواص رئولوژیکی ذرات باشند. روش SPH در طول دو دهه گذشته، پس از تدوین اصول اولیه، بطور گسترده برای شبیه سازی مسائل مربوط به فیزیک اخترشناسی و مدلسازی حرکت اجرام آسمانی نسبت به یکدیگر استفاده شده است. پس از انجام اصلاحات لازم، از این روش برای مدلسازی جریان های تراکم ناپذیر در محفظه های بسته نیز استفاده شد. مزایای عمده روش SPH برای مدلسازی انتقال حرارت و جرم در کاربردهای صنعتی عبارتند از [۵]:

- سطح آزاد با اشکال بسیار پیچیده و رفتار سطح مشترک مواد، بطور طبیعی و براحتی مدلسازی می شوند.
- استفاده از چارچوب لاگرانژی به معنی حذف ترم های غیر خطی در معادله مومنتوم است، بنابراین می توان پیش بینی کرد که پدیده های که در طبقه بندی مسائل مومنتوم غالب (momentum dominated) قرار

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

می گیرند براحتی با این روش قابل حل باشند.

- فیزیک های پیچیده نظیر مسائل چند فازی، معادله حالت واقعی، تراکم پذیری، انجماد، جریان در محیط متخلخل، میدان های الکترومغناطیسی وابسته به خواص مواد براحتی مدلسازی می گردد.

همانطور که گفته شد این روش در سالهای اخیر برای مدلسازی جریانات تراکم ناپذیر شدیدا مورد توجه قرار گرفته است و به همین دلیل هنوز در بسیاری از زمینه ها به عنوان یک ابزار محاسباتی استفاده نشده است تا نحوه عملکرد و دقت نتایج آن به درستی ثبت گردد. از جمله این زمینه ها می توان به مدلسازی کاویتاسیون و مدلسازی واکنش های شیمیایی اشاره کرد که تاکنون مقاله ای در مورد مدلسازی این پدیده ها با روش SPH منتشر نشده است.

در این مقاله از فرمولاسیون تراکم ناپذیر SPH برای شبیه سازی پدیده ضربه زنی آب (Sloshing) در یک مخزن نیمه پر مایع استفاده شده است. سطح آزاد مایع در ظرف دارای شکل اولیه سینوسی با دامنه کوچک می باشد. بدیهی است که در این روش، معادلات حاکم بر مسئله از قبیل معادله بقای جرم و بقای مومنتوم به صورت تعبیری خاص از معادلات لاگرانژی استفاده شده اند که به تفضیل آورده شده است. روش استفاده شده دو مرحله ای بوده که شامل مرحله پیش بینی اولیه و تصحیح ثانویه می باشد. در مرحله پیش بینی اولیه هر ذره در اثر مجموعه نیروهای وارده، بدون توجه به تغییرات چگالی حرکت می کند و در مرحله تصحیح ثانویه شروط لازم برای بازگرداندن چگالی به مقدار اولیه اعمال می شود، تا در نهایت سیال به صورت تراکم ناپذیر مدل گردد. نتایج حل مسئله در مود اول آن به کمک روش VOF و SPH با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج حاصله حاکی از سازگاری بسیار خوب اشکال بدست آمده در زمانهای یکسان با نتایج مشابه VOF می باشد

مدل ریاضی

بعلت پیچیدگی ذاتی مسائل درگیر با سطح آزاد سیال، برخی از فرضیات ساده سازی بکار گرفته شدند که عبارتند از: چگالی و ویسکوزیته ثابت، تراکم ناپذیری و همدما بودن میدان سیال، صرفنظر از کشش سطحی و انتقال جرم سطحی.

معادلات حاکم برای شبیه سازی جریان سطح آزاد سیال در دو بعد، معادلات بقاء جرم و مومنتوم می باشند، که با در نظر گرفتن ذرات سیال، این معادلات به فرم لاگرانژی نوشته شده اند[۴].

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla.\underset{u}{\rho} = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{D\underset{u}{\nu}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \underset{g}{\rho} + \frac{1}{\rho}\nabla.\overset{=}{\tau} \qquad (۲)$$

در روابط بالا ρ چگالی ذرات سیال ، t زمان، $\underset{u}{\nu}$ سرعت ذرات، P فشار، $\underset{g}{\nu}$ شتاب جاذبه و $\overset{=}{\tau}$ تنسور تنش برشی می باشد. معادله (۱) به فرم سیال تراکم پذیر نوشته شده است. اما برای مدلسازی جریانهای تراکم ناپذیر پس از حل این معادله می بایست مقدار انحراف چگالی نسبت به چگالی اولیه سنجیده شود تا در مرحله اصلاحی هر گام زمانی، چگالی به مقدار اولیه تصحیح گردد. در واقع برای مدلسازی جریانات تراکم

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

ناپذیر پروسه حل از دو مرحله پیش بینی اولیه و مرحله اصلاحی ثانویه تشکیل شده است. در مرحله پیش بینی اولیه هر ذره در اثر مجموعه نیروهای وارده و با توجه به بازه زمانی استفاده شده به حرکت واداشته می شود اما شرط تراکم ناپذیری سیال لحاظ نمی شود بلکه فقط تنسور تنش و ترم های گرانشی در معادله نویر-استوکس در نظر گرفته می شوند و در نتیجه سرعت و موقعیت موقتی برای هر ذره محاسبه می گردد. فرمولهای بکار رفته در این مرحله عبارتند از[۴] :

$$\Delta \vec{u}_* = (\vec{g} + \frac{1}{\rho}\nabla.\bar{\tau})\Delta t \quad (۳)$$

$$\vec{u}_* = \vec{u}_t + \Delta \vec{u}_* \quad (۴)$$

$$\vec{r}_* = \vec{r}_t + \vec{u}_* \Delta t \quad (۵)$$

در این معادلات u_t و r_t سرعت و موقعیت ذره در لحظه t ، u_* و r_* سرعت و موقعیت موقتی ذره می باشند. $\Delta \vec{u}_*$ تغییر سرعت هر ذره در طول پروسه پیش بینی اولیه و Δt طول بازه هر گام زمانی می باشد. در طول مرحله اول پیش بینی، معمولا شرط تراکم ناپذیری ارضاء نمی شود.این شرط بوسیله اندازه گیری میزان انحراف چگالی موقتی هر ذره ρ_* از چگالی ثابت اولیه ρ_0 سنجیده می گردد. ρ_* براساس موقعیت موقتی ذره $\vec{r}_*$ محاسبه می گردد.

بنابراین مرحله اصلاحی دوم می بایست اجراء شود تا با اصلاح موقعیت ذرات نسبت به یکدیگر چگالی ثابت اولیه آنها حفظ شود. در مرحله اصلاحی جمله فشاری برای تصحیح مقدار سرعت موقتی ذرات که در مرحله اولیه بدست آمده بود، بکار می رود. روند اصلاحی ذکر شده به کمک روابط زیر پیاده سازی می شود [۴]:

$$\Delta \vec{u}_{**} = -\frac{1}{\rho}\nabla P_{t+\Delta t}\Delta t \quad (۶)$$

$$\vec{u}_{t+\Delta t} = \vec{u}_* + \Delta \vec{u}_{**} \quad (۷)$$

در روابط بالا $\Delta \vec{u}_{**}$ تغییر سرعت ذرات در طی مرحله اصلاحی دوم و ρ_* چگالی موقتی ذرات است که در پایان مرحله پیش بینی اولیه محاسبه شده بود.

$P_{t+\Delta t}$ و $\vec{u}_{t+\Delta t}$ فشار و سرعت ذره در زمان $t+\Delta t$ می باشد. سرانجام موقعیت نهایی ذرات عبارتست از[۴]:

$$\vec{r}_{t+1} = \vec{r}_t + \frac{(\vec{u}_t + \vec{u}_{t+1})}{2}\Delta t \quad (۸)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

در رابطه فوق $\vec{r}_t$ و $\vec{r}_{t+\Delta t}$ موقعیت های نهایی ذره در لحظات t و $t+\Delta t$ می باشد. معادله بکار رفته برای بدست آوردن فشار لازم جهت ارضاء شرط تراکم ناپذیری سیال معادله بقای جرم، معادله (۱)، می باشد که فرم گسسته این معادله به شکل زیر می باشد[۴]:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_0-\rho_*}{\Delta t}+\nabla.(\Delta\vec{u}_{**})=0 \qquad (۹)$$

در معادله فوق ρ_* چگالی موقتی سیال در پایان مرحله پیش بینی اولیه و ρ_0 چگالی ثابت سیال است. در پایان هر گام زمانی می بایست چگالی هر ذره مساوی مقدار ثابت اولیه گردد. با ادغام معادلات (۶) و (۹) معادله پوآسون فشار مطابق زیر خواهد بود[۴]:

$$\nabla.(\frac{1}{\rho}\nabla P_{t+\Delta t})=\frac{\rho_0-\rho_*}{\rho_0\Delta t^2} \qquad (۱۰)$$

اصول روش SPH

در ذات روش SPH یک روش میان یابی قرار دارد که به هر تابعی اجازه می دهد براساس مقادیر خود در یک مجموعه نامنظم از نقاط تعریف گردد، که این نقاط در روش SPH ذرات (particles) نامیده می شود. میان یاب انتگرالی هر تابع به صورت زیر تعریف می شود [۵]:

$$\mathbf{A}_h(\mathbf{r})=\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}')w(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h)d\mathbf{r}' \qquad (۱۱)$$

که w تابع کرنل میان یاب است که دو خاصیت اساسی زیر را دارا می باشد [۵]:

$$\int_V w(\mathbf{u},h)d\mathbf{u}=1 \qquad \lim_{h\to 0} w(\mathbf{u},h)=\delta(\mathbf{u}) \qquad (۱۲)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

در روشهای عددی میان یاب انتگرالی معمولاً با یک مجموع میان یاب تقریب زده می شود [۵]:

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{\mathbf{A}_j}{\rho_j} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \qquad (۱۳)$$

در رابطه فوق m_j و ρ_j جرم و چگالی ذره j است که عمل جمع بر روی تمامی ذرات واقع در داخل شعاع همسایگی $2h$ از موقعیت مکانی r تعریف شده است.

در این رابطه $W(\mathbf{r},h)$ تابعی با خصوصیات یک C^2 - spline می باشد که دارای شعاع هموارسازی کرنل $2h$ می باشد. گرادیان تابع A با مشتق گیری از تابع میان یاب (۱۳) بصورت زیر بدست می آید:

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{\mathbf{A}_j}{\rho_j} \nabla w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \qquad (۱۴)$$

تابع کرنل

استفاده از کرنل های متفاوت در روش SPH همانند بکارگیری روشهای متفاوت گسسته سازی در روش تفاضل محدود می باشد. یکی از متداولترین کرنلهایی که در روش SPH استفاده می شود براساس تابع اسپلاین تعریف شده است[۵]:

$$w(r,h) = \frac{\sigma}{h^\nu} \times \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 & 0 \le s < 1 \\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & 1 \le s < 2 \\ 0 & 2 \le s \end{cases} \qquad s = \frac{|\mathbf{r}|}{h} \qquad (۱۵)$$

در معادله فوق ν تعداد ابعاد مسئله و σ یک ثابت نرمال شده با مقادیر $2/3$ و $10/7\pi$ و $1/\pi$ به ترتیب برای یک، دو و سه بعد می باشد. مشتق دوم این کرنل پیوسته است و ترم خطای حاکم در میان یاب انتگرال $O(h^2)$ می باشد. شعاع هموارسازی این کرنل $2h$ می باشد به این معنی که ذرات در فاصله دورتر از $2h$ هیچ برهم کنشی با یکدیگر ندارند.

معادله پیوستگی

معادله پیوستگی به شکل زیر نوشته می شود [۵]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla w_{ij} \qquad (۱۶)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

در معادله فوق ρ_i چگالی ذره i با سرعت v_i بوده و m_j جرم ذره j می باشد. بردار موقعیت از ذره j تا ذره i بصورت $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ نشان داده می شود و $w_{ij} = w(\mathbf{r}_{ij}, h)$ می باشد. وقتی که دو ذره به یکدیگر نزدیک می شوند سرعت نسبی آنها منفی بوده و بعلت منفی بودن گرادیان تابع کرنل، $d\rho_i/dt$ که حاصلضرب این دو مقدار است مثبت خواهد شد. بعبارت دیگر ρ_i افزایش خواهد یافت. این عامل باعث ایجاد یک فشار مثبت شده که در نهایت ذرات را از یکدیگر دور خواهد کرد. به طریق مشابه اگر دو ذره از یکدیگر فاصله بگیرند، چگالی آنها کاهش خواهد یافت و فشار منفی ایجاد شده دو ذره را به سمت یکدیگر می کشاند. این رفتار متقابل چگالی و فشار برحسب سرعت نسبی ذرات سبب می شود که بتوان رفتار سیال را تراکم ناپذیر فرض کرد چرا که با انجام دو مرحله پیشگویی اولیه و تصحیح ثانویه در هرگام زمانی، فاصله ذرات نسبت به یکدیگر تقریباً در کل پروسه حل ثابت می ماند.

فرمولاسیون گرادیان و دیورژانس

شکل متقارن زیر یکی از متداولترین فرم های بکار رفته برای فرمولاسیون گرادیان می باشد. علت این امر را می توان در پایستگی دقیق ممنتوم خطی و زاویه ای جستجو کرد، بطور مثال گرادیان فشار بصورت زیر نمایش داده می شود [۴]:

$$(\frac{1}{\rho}\nabla P)_a = \sum_b m_b (\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2})\nabla_a W \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق $\nabla_a w_{ab}$ گرادیان تابع کرنل با در نظر گرفتن موقعیت ذره a می باشد. در عمل فقط ذراتی که در فاصله کمتر از $2h$ قرار دارند تاثیرگذار خواهند بود. به طریق مشابه دیورژانس بردار $\underset{u}{\rightarrow}$ متعلق به ذره a، می تواند بصورت متقارن به شکل زیر فرموله گردد [۴]:

$$\nabla.\underset{u_a}{\rightarrow} = \rho_a \sum_b m_b (\frac{\underset{u_a}{\rightarrow}}{\rho_a^2} + \frac{\underset{u_b}{\rightarrow}}{\rho_b^2}).\nabla_a W_{ab} \qquad (۱۸)$$

فرمولاسیون لاپلاسین

لاپلاسین در معادله پوآسون فشار، معادله (۱۰)، را می توان بوسیله ترکیب عملگرهای دیورژانس و گرادیان بدست آورد. اما تعریف عملگر لاپلاسین براساس ترکیبی از تعاریف پایه ای SPH و استفاده از تقریب تفاضل محدود مشتق مرتبه اول، باعث فرمولاسیون بهتری به لحاظ پایداری بیشتر در مقابل نامنظم بودن نقاط می شود. در نهایت رابطه زیر بعنوان عملگر لاپلاسین پیشنهاد شده است [۴]:

$$\nabla.(\frac{1}{\rho}\nabla P)_a = \sum_b m_b \frac{8}{(\rho_a + \rho_b)^2} \frac{P_{ab} \underset{r_{ab}}{\rightarrow}.\nabla_a w_{ab}}{\left|\underset{r_{ab}}{\rightarrow}\right|^2 + \eta^2} \qquad (۱۹)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

در رابطه فوق $P_{ab} = P_a - P_b$ و $\vec{r}_{ab} = r_a - r_b$ و η عددی کوچک است که برای جلوگیری از صفر شدن مخرج عبارت در حین پروسه حل ارائه شده است و معمولا برابر $0.1h$ در نظر گرفته می شود.

ویسکوزیته

جمله ویسکوزیته در معادله (۲) بصورت ترکیبی از SPH استاندارد و تقریب تفاضل محدود برای مشتق مرتبه اول تعریف می شود. با اعمال تعریف دیورژانس در معادله (۱۸) ترم شامل ویسکوزیته به شکل زیر بدست می آید [۴]:

$$\left(\frac{1}{\rho}\nabla.\bar{\bar{\tau}}\right)_a = \sum_b m_b \left(\frac{\bar{\bar{\tau}}_a}{\rho_a^2} + \frac{\bar{\bar{\tau}}_b}{\rho_b^2}\right).\nabla_a w_{ab} \qquad (۲۰)$$

در معادله فوق تنسور تنش $\bar{\bar{\tau}}$ و تنسور کرنش $\bar{\bar{\Delta}}$ به شکل مجموع با یکدیگر ارتباط پیدا می کنند[۴]:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu_{eff}\Delta_{ij} \qquad (۲۱)$$

در رابطه فوق μ_{eff} ویسکوزیته متغیری است که درسیالات غیر نیوتنی مقداری غیر ثابت دارد. Δ_{ij} به صورت زیر تعریف می شود[۴]:

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (۲۲)$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری به نظر می رسد که برای اعمال روابط فوق به ذرات SPH ، قبلا می بایست مشتق کامل بین دو ذره با استفاده از تعریف تفاضل محدود بدست آمده باشد. بنابراین خواهیم داشت[۴]:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_a = \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_{ab}}\right)\left(\frac{\partial r_{ab}}{\partial x_j}\right)^{-1} = \frac{(u_i)_a - (u_i)_b}{r_{ab}}\frac{(x_j)_a - (x_j)_b}{r_{ab}} \qquad (۲۳)$$

با در نظر گرفتن سیالات نیوتنی نظیر آب ظریب ویسکوزیته موثر برابر مقدار ثابت μ خواهد بود. بنابراین با ترکیب معادلات (۲۰) و (۲۳) و اعمال شرط تراکم ناپذیری، رابطه مربوط به ترم ویسکوزیته در فرمولاسیون SPH بصورت زیر خواهد شد [۴]:

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{u}\right)_a = \sum_b \frac{4m_b(\mu_a+\mu_b)\vec{r}_{ab}.\nabla_a W_{ab}}{(\rho_a+\rho_b)^2(|\vec{r}_{ab}|^2+\eta^2)}(\vec{u}_a - \vec{u}_b) \qquad (۲۴)$$

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

مدلسازی مرزهای جامد

بطور کلی دیواره های جامد بوسیله ذرات مرزی شبیه سازی می شوند که با تنظیم فشار ذرات داخلی مانع از نفوذ آنها به داخل دیواره های جامد می شود. روش دیگر برای مدلسازی دیواره جامد بوسیله ذرات مرزی اعمال یک میدان نیروی دافعه برروی ذرات مرزی می باشد که مانع نفوذ ذرات داخلی گردد[۶]. راه دیگر مدلسازی مرزهای جامد استفاده از تصویر مجازی ذرات داخلی سیال، با فرض عملکرد آینه ای مرزهای جامد می باشد. در اینصورت با نزدیک شدن ذرات داخلی به دیواره تصویر این ذرات نیز به دیواره نزدیک می شود که در نتیجه مانع از نفوذ ذرات به مرزهای جامد می گردد [۷].

در این مقاله دیواره های جامد بوسیله ذرات مرزی مدلسازی شده اند ذراتی که از هر نظر خواصی مشابه ذرات داخلی سیال دارند با این تفاوت که پس از محاسبه سرعت در هر گام زمانی این مقدار برای ذرات مرزی مساوی صفر قرار داده می شود. بنابراین موقعیت این ذرات در حین پروسه حل ثابت می ماند. از طرفی خواص ذرات مرزی وابسته به جریان موجود در داخل میدان محاسباتی می باشد. به عنوان مثال حرکت ذرات مرزی به طرف دیواره باعث افزایش چگالی آنها و در نتیجه تولید فشار مثبت در ذرات مرزی می گردد که مانع نفوذ ذرات داخلی به داخل میدان محاسباتی می گردد.

تحلیل همگرایی

بدلیل اینکه ذرات داخلی سیال ذاتاً ذراتی گسسته می باشند نمی توانند مانند سیالات واقعی تغییر شکل پیدا کنند. بنابر این تعداد این ذرات می بایست به اندازه کافی انتخاب شود تا جریان واقعی سیال شبیه سازی شود و از طرفی همگرایی عددی لازم نیز بدست آید. همگرایی هنگامی حاصل می شود که با دو برابر کردن تعداد ذرات داخلی سیال نتایج بدست آمده تغییری نکند. این در حالیست که بازه زمانی Δt نیز می بایست با دو برابر شدن تعداد ذرات، نصف شود تا سازگاری (consistency) پروسه حل ارضاء گردد. طول بازه هر گام زمانی در محاسبات می بایست شرط کورانت (Courant condition) زیر را نیز ارضاء نماید[۴]:

$$\Delta t \le 0.1 \frac{l_0}{V_{\max}} \qquad (۲۵)$$

در رابطه فوق $V_{\max}$ بیشینه سرعت پیش بینی شده در هرگام زمانی از محاسبات می باشد. ضریب 0.1 تضمین می کند که ذرات در هر گام زمانی تنها به اندازه جزئی از فاصله اولیه ذرات (در اینجا) 0.1 حرکت می کنند. بعلاوه طول هر بازه زمانی می بایست به گونه ای انتخاب گردد که ترمهای پخش لزجتی را کنترل کند، بعبارت دیگر درهر گام زمانی شرط زیر باید ارضاء گردد[۴] :

$$\Delta t \le \alpha \frac{{l_0}^2}{\mu_{eff} / \rho} \qquad (۲۶)$$

در رابطه فوق α ضریبی است که به انتخاب نوع کرنل و آرایش اولیه ذرات بستگی دارد که معمولا از مرتبه 0.1 است. در روشهای تفاضل محدود صریح نیز معمولا شروطی نظیر معادله (۲۶) به عنوان شرط پایداری وجود دارد.

لیست ذرات مرتبط با یکدیگر

در روش SPH تراکم ناپذیر هر ذره نیاز به لیستی از ذرات مجاور دارد که در شعاع همسایگی کوچکتر یا مساوی محدوده اثرپذیری کرنل قرار داشته باشند . لیست کامل این ذرات، که در هر گام زمانی می بایست مجدداً تولید شود، نیاز به N^2 عملیات محاسباتی دارد تا

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

فاصله بین تمامی ذرات، محاسبه گردد N (تعداد کل ذرات است). روشهای بهینه سازی متفاوتی برای محاسبه این لیست ذرات ارائه شده است.

در این مقاله از تقسیم دامنه محاسباتی به سلولهایی به شعاع $2h$ و تولید لیستی از ذرات متعلق به هر سلول در هر گام زمانی از پروسه حل استفاده شده است. فرض به کار رفته در مورد هر ذره این است که فقط با ذرات واقع در سلولهای مجاور اندرکنش دارد. با بکارگیری این روش بازده محاسباتی تا حد قابل ملاحظه ای افزایش خواهد یافت[۴].

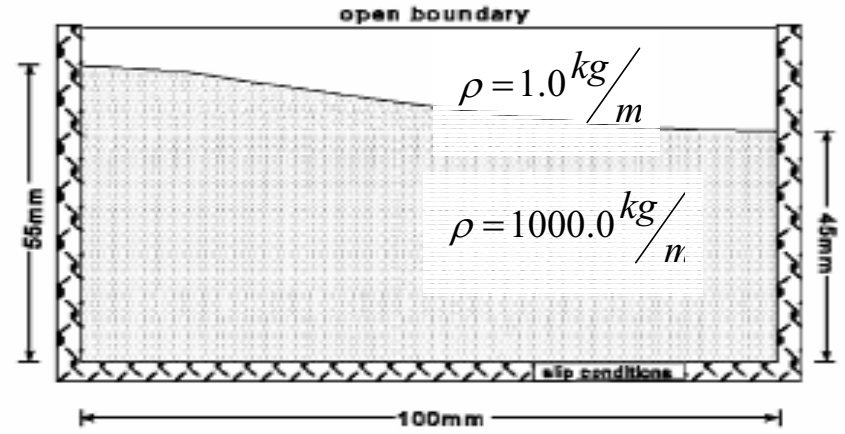
شبیه سازی Sloshing با دامنه کوچک تحت نیروی گرانشی

در اینجا بعنوان یک مسئله نمونه از جریان با سطح آزاد پیچیده، مسئله ضربه زنی آب (Water sloshing) مورد مطالعه قرار میگیرد. ضربه زنی ایجاد شده در یک ظرف مایع با دامنه موج کوچک و تحت اثر نیروی گرانشی با بکارگیری ابزارهای ریاضی بطور مفصل مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۵ *راد* و همکارانش مدل آزمایشگاهی مناسبی برای مسئله ساختند و پدیده های مختلف جریان را مورد مطالعه قرار دادند [۸]. در سالهای اخیر نیز روشهای CFD برای شبیه سازی چنین جریانهایی مورد توجه قرارگرفته است. لازم به ذکر است که روشهای مورد استفاده می بایست قابلیت مدلسازی دقیق جریانات سطحی و همچنین حفظ پایستاری انتقال انرژی از فرم پتانسیل به جنبشی و برعکس را دارا باشند و بعلاوه پخش عددی ناشی از گسسته سازی آنها ناچیز باشد.

ابعاد مسئله مورد مطالعه، در شکل ۱ نشان داده شده است. این ابعاد دقیقاً با مدل آزمایشگاهی بکار رفته توسط *راد* و همکارانش مطابقت دارد. عمق متوسط اولیه سیال 0.05 متر بوده و سطح اولیه آن بوسیله یک نیم موج کسینوسی با دامنه 0.005 تعریف شده است. ظرف دارای ابعاد 0.1×0.065 متر می باشد. جریان سیال غیرلزج فرض شده است و کل سیال تحت اثر یک میدان گرانشی با شتاب ثابت $g=9.81 m/s^2$ قرار دارد. پریود تئوری Sloshing در مود اول آن از رابطه زیر محاسبه می گردد:

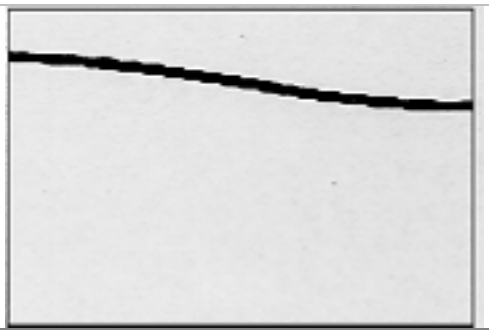
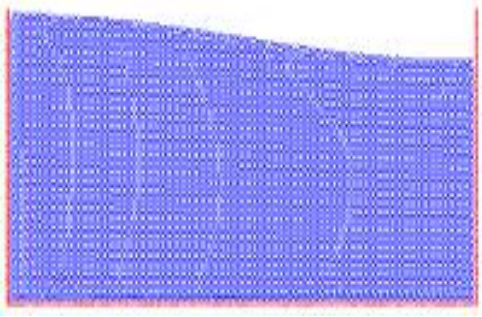
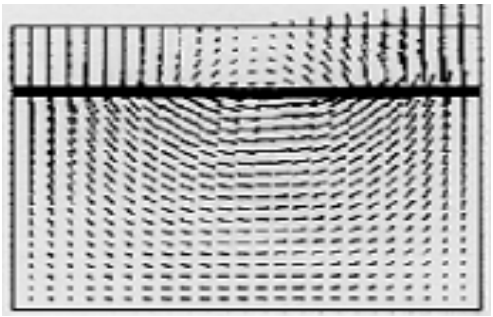
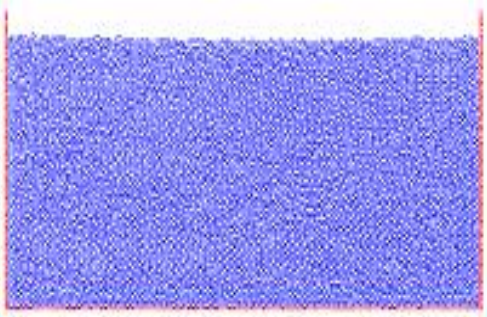
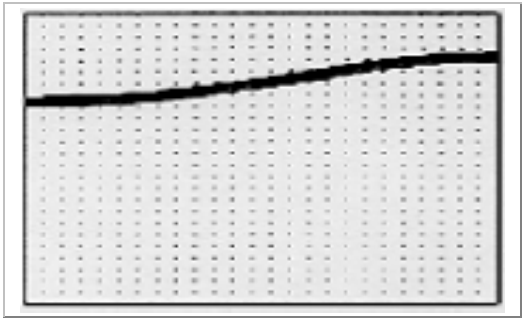
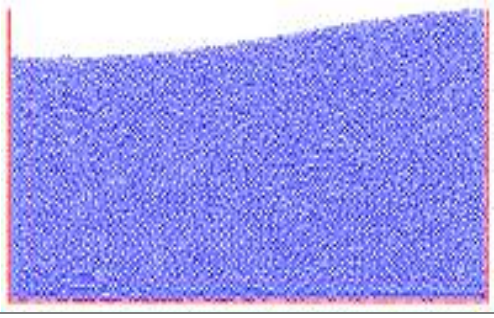
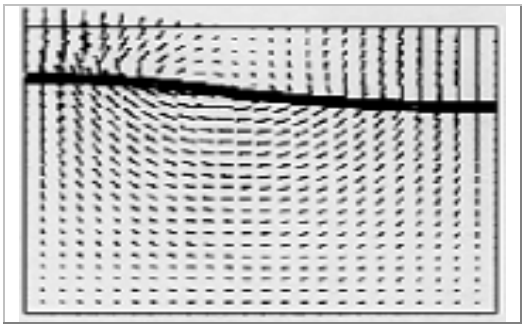
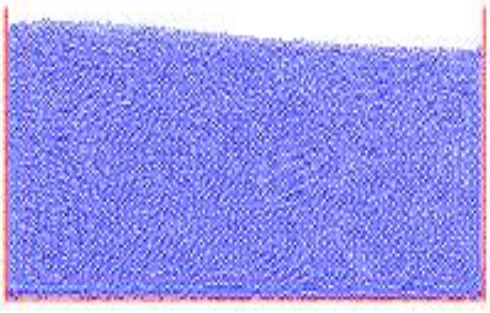
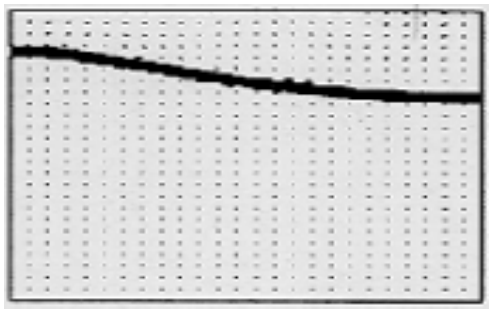
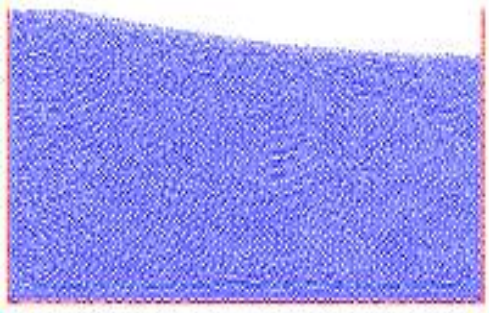
$$\tau = 2\pi\sqrt{gk\tanh(kh)} = 0.3739s \qquad (۲۷)$$

در رابطه بالا k عدد موج و h عمق متوسط سیال می باشد. نتایج حل مسئله در پریود اول در شکل ۲ نشان داده شده است. شکل نتایج حل به کمک روش SPH مطابقت خوبی با نتایج حاصل از روش VOF نشان می دهند.



شکل ۱ _ شماتیک شرایط اولیه مسئله و ابعاد بکار رفته در مدلسازی عددی [۸]

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

زمان	نتایج VOF [۸]	نتایج SPH
Initial condition		
1/4 *Period*		
1/2 *Period*		
7/8 *Period*		
1 *Period*		

شکل ۲- نتایج حاصل از مدلسازی به روش SPH برای وضعیتهای متفاوت سیال غیر لزج با شکل اولیه سینوسی و تحت اثر گرانش

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]

نتیجه گیری

در اینجا نشان داده شد که روش SPH روشی بسیار موثر و دقیق برای شبیه سازی جریانهایی با سطوح آزاد می باشد. مقاله پس از ارائه مبانی روش مذکور، بمنظور مدلسازی پدیده ضربه زنی آب (Sloshing) در یک مخزن نیمه پر مایع با شکل سطح آزاد اولیه سینوسی و دامنه موج کوچک استفاده شده است. کل حرکت تناوبی سیال، تحت تاثیر یک میدان گرانشی با شتاب ثابت $g = 9.81 m/s^2$ قرار دارد. نتایج حل مسئله در مود اول آن به کمک روش VOF و SPH با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج SPH حاکی از سازگاری بسیار خوب اشکال بدست آمده در زمانهای یکسان با نتایج مشابه VOF می باشد.

مراجع

1) She k., Greated C. A. and Easson W. J., DEVELOPMENT OF A TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL WAVE TANK, Proceeding of the Second (1992) International Offshore and Polar Engineering Conference San Francisco, USA, 14-19 June 1992
2) Harlow FH, Welch JE. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Phys Fluids 1965;8(12):322–9.
3) Hirt CW, Nichols BD. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. J Comput Phys 1981; 39:201–25.
4) Songdong Shao , Edmond Y.M. Lo , Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. Advances in Water Resources 26 (2003) 787–800
5) Monaghan J.J., "Smoothed Particle Hydrodynamics", Annual Reviews Astron. Astrophys.,30(1992)543.
6) Monaghan JJ, Kos A. Solitary waves on a Cretan beach. J Wtrwy,Port, Coastal and Ocean Eng 1999;125(3):145–54.
7) Monaghan J.J., "Improved modelling of boundaries", SPH Technical Note#1, Monash Univ., Applied mathematics reports & preprints,95/30.
8) Ubbink Onno, Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces Thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College, Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology & Medicine January 1997.

[Downloaded from marine-eng.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.17357608.1383.1.2.1.3]